	GESTIÓN DE SERVICIOS ACADÉMICOS Y BIBLIOTECARIOS	CÓDIGO	FO-GS-15
		VERSIÓN	02
	ESQUEMA HOJA DE RESUMEN	FECHA	03/04/2017
		PÁGINA	1 de 1

ELABORÓ	REVISÓ	APROBÓ
Jefe División de Biblioteca	Equipo Operativo de Calidad	Líder de Calidad

RESUMEN TRABAJO DE GRADO

AUTOR(ES): NOMBRES Y APELLIDOS COMPLETOS

NOMBRE(S): LAURA DANIELA APELLIDOS: PUMAREJO GARCIA

NOMBRE(S): DAVID ANDREE APELLIDOS: PARADA CARRILLO

FACULTAD: EDUCACIÓN, ARTES Y HUMANIDADES

PLAN DE ESTUDIOS: LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR:

NOMBRE(S): CESAR AUGUSTO APELLIDOS: HERNÁNDEZ SUÁREZ

CODIRECTOR:

NOMBRE(S): RAÚL APELLIDOS: PRADA NÚÑEZ

TÍTULO DEL TRABAJO (TESIS): EXPERIENCIAS DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN CON EL ENTRENAMIENTO DE AUTOEXPLICACIÓN Y SU COMPRENSIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

LA INVESTIGACIÓN TUVO POR OBJETIVO DESCRIBIR LOS CAMBIOS EN LA COMPRENSIÓN DE LAS DEMOSTRACION DE LAS DEMOSTRACIONES ANTES Y DESPUÉS DEL ENTRENAMIENTO DE AUTOEXPLICACIÓN. PARA ESTO SE UTILIZÓ EL MODELO DE EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES DE MEJIA-RAMOS ET AL. (2012) Y EL ENTRENAMIENTO DE AUTOEXPLICACIÓN DE HODDS EL AT. (2014). EL ENFOQUE METODOLÓGICO UTILIZADO ES LA INVESTIGACIÓN MIXTA, CON UN DISEÑO ANIDADO, SECUENCIAL Y DE MAYOR PONDERACIÓN EN EL ENFOQUE CUANTITATIVO CORRELACIONAL. AMBOS ENFOQUES SE RELACIONARON EN LA CONVERGENCIA DE LA ENCUESTA DE SATISFACCIÓN Y LAS ENTREVISTAS. EN EL ESTUDIO SE ENCONTRÓ QUE LOS ESTUDIANTES MEJORARON EN LOS NIVELES DE DESEMPEÑO ESTABLECIDOS, ADEMÁS DESTACARON LA IMPORTANCIA DEL CAMBIO EN LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS PARA ESTUDIAR DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS.

PALABRAS CLAVES: COMPRENSIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN, AUTOEXPLICACIÓN, MODELO DE EVALUACIÓN, DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS, CARACTERÍSTICAS:

PÁGINAS: 151 PLANOS: ___ILUSTRACIONES: ____CD ROOM: ___

EXPERIENCIAS DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN CON EL ENTRENAMIENTO DE AUTOEXPLICACIÓN Y SU COMPRENSIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

LAURA DANIELA PUMAREJO GARCIA
DAVID ANDREE PARADA CARRILLO

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
FACULTAD DE EDUCACIÓN, ARTES Y HUMANIDADES
PLAN DE ESTUDIOS LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JOSÉ DE CÚCUTA
2022

EXPERIENCIAS DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN CON EL ENTRENAMIENTO DE AUTOEXPLICACIÓN Y SU COMPRENSIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

LAURA DANIELA PUMAREJO GARCIA

DAVID ANDREE PARADA CARRILLO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director

CÉSAR AUGUSTO HERNÁNDEZ SUÁREZ

Magister en Enseñanza de las Ciencias Básicas.

Codirector

RAÚL PRADA NÚÑEZ

Magister Educación Matemática

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER

FACULTAD DE EDUCACIÓN, ARTES Y HUMANIDADES

PLAN DE ESTUDIOS LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JOSÉ DE CÚCUTA

2022

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT 890500622 - 6

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE UN TRABAJO DE GRADO
PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FECHA: San José de Cúcuta, 30 de agosto 2022
HORA: 11:00 a.m.
LUGAR: Sala P4 Edificio Cread

TITULO: "EXPERIENCIAS DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN CON EL ENTRENAMIENTO DE AUTOEXPLICACIÓN Y SU COMPRENSIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS".

DIRECTOR (A): CÉSAR AUGUSTO HERNÁNDEZ SUÁREZ, Magister en Enseñanzas de las Ciencias Básicas Mención Matemática

CODIRECTOR: RAUL PRADA NUÑEZ, Mg. En Matemática mención Educación Matemática

JURADOS: SONIA MARITZA MENDOZA LIZCANO
PASTOR RAMIREZ LEAL
LUZ ELENA PEDRAZA RINCÓN

NOMBRE DEL ESTUDIANTE	CÓDIGO	CALIFICACIÓN	A.M.L
DAVID ANDREE PARADA CARRILLO	1360123	4.7	MERITORIA
LAURA DANIELA PUMAREJO GARCÍA	1360117	4.7	MERITORIA

SONIA MARITZA MENDOZA LIZCANO

PASTOR RAMIREZ LEAL

Luz Elena Pedraza R.
LUZ ELENA PEDRAZA RINCÓN

Olga L. Rincón L.
OLGA LUCY RINCÓN LEAL
Directora Programa Académico
Licenciatura en Matemáticas

Myriam A.

Dedicatoria

A mi madre, Beatriz Romelia Carrillo Rodas

Quien, a su honor y principal fuente de inspiración, dedico este trabajo de grado. Y de seguro desde el cielo, estará orgullosa de verme alcanzar tan importante logro.

A mi madre, María Laura Garcia Acosta.

Mujer tenaz y resiliente, mi mayor motivo para superarme cada día.

Agradecimientos

El Seminario Investigativo I fue la asignatura que marcó un antes y un después en nuestro proceso académico. Pensar en un tema de investigación fue un proceso de reflexión y discusión constante, donde solo nos queda agradecer y reconocer a cada una de las personas que nos escucharon, leyeron y apoyaron.

En primer lugar, queremos agradecer a nuestro director y codirector de proyecto de grado, Magister en Educación Matemáticas Raúl Prada Núñez y Magister en Enseñanza de las Ciencias Básicas Cesar Augusto Hernández-Suarez, por ayudar a organizar nuestras ideas, centrarnos en lo realizable y apoyarnos incansablemente en los momentos más importantes del proceso.

En segundo lugar, un agradecimiento especial a los Doctores en Educación Matemática Lara Alcock y Juan Pablo Mejía-Ramos, por guiarnos desde su experiencia académica y compartirnos su producción intelectual.

Por último, queremos dar un agradecimiento nuestras familias, en especial a Paola Parada, Joan Sánchez, Franklin Camargo, Daniel y Karen Pumarejo por estar para nosotros en todo momento, animándonos, sosteniéndonos con su amor incondicional y cómo sus mensajes perfectos desde la distancia.

Tabla de contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Introducción

El presente estudio surge a partir de la identificación de las dificultades en la comprensión de las actividades demostrativas, que presentan los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Francisco de Paula Santander (UFPS). Dado que en la UFPS solo existe un antecedente que realiza un primer acercamiento, se optó por la búsqueda de investigaciones que ayudarán a mitigar dicha problemática.

Durante este trabajo de indagación, se encuentra que los estudios se basan en cuatro actividades que comprenden las demostraciones matemáticas, que son la construcción, la comprensión, la validación y la evaluación (Selden & Selden, 2017). A partir de ellos, se encontró que mayoritariamente los estudios en español abordaban las demostraciones principalmente desde la construcción. A partir de esto, se decide investigar sobre un enfoque diferente, en aras de poder aportar literatura acerca de la comprensión de las demostraciones.

En relación con el estado del arte se desarrolló un artículo en el que se realizó una revisión acerca de lo que significa comprender y específicamente comprender demostraciones matemáticas, encontrándose investigaciones relacionadas con el cambio de presentación del contenido, cambios en los modelos de evaluación, modelos cognitivos y estudios que han tomado como base las investigaciones previas. Por otra parte, en el marco conceptual se precisa las diferencias entre explicaciones, pruebas y demostraciones.

Para el sustento teórico se utilizaron dos investigaciones centradas en el desarrollo de la comprensión de las demostraciones, la primera se enfoca en el desarrollo de un modelo de evaluación que describe en dimensiones los componentes necesarios para comprenderlas, destaca la existencia de una dimensión local, centrada en los elementos y estructura lógica de la demostración y la dimensión holística, enfocada en entender cómo se interrelacionan los elementos, su uso en ejemplos y otros contextos. Por otra parte, se trabajó con el entrenamiento de autoexplicación cómo una estrategia para el mejoramiento de la comprensión.

Finalmente, se utilizó un enfoque mixto, con diseño anidado en donde se le dio mayor ponderación a la metodología |cuantitativa correlacional sobre la cualitativa. La investigación se llevó a cabo con docentes en formación de Licenciatura en Matemáticas que cómo mínimo hubieran cursado Teoría de Números. Con quienes se realizó una prueba diagnóstica, una intervención, una prueba de comprensión y al final una entrevista, con la finalidad de describir los cambios que tuvieron los estudiantes antes y después de la intervención.

1. Problema

1.1. Título

La prueba de comprensión de las demostraciones y el entrenamiento de autoexplicación.

1.2. Planteamiento del problema

Las demostraciones matemáticas son el medio principal por el cual los matemáticos demuestran que un teorema es verdadero. Harel & Sowder (1998) mencionan además que pueden servir como portadoras de conocimiento al ilustrar métodos de resolución de problemas que pueden usarse para probar otros enunciados. De Villiers (1990) argumentó que una función importante de la demostración es la comunicación de estándares de argumentación que facilitan el debate sobre ideas matemáticas sofisticadas entre matemáticos.

Estas demostraciones llegan a las aulas de clases presentadas cómo una forma de proporcionar el conocimiento matemático, para que los estudiantes puedan lograr técnicas y comprenderlas, no únicamente dar por sentado que un teorema es verdadero (Hanna, 1990). Por otra parte, Harel & Sowder (2007) afirman que uno de los fines de la instrucción en matemáticas es "ayudar a los estudiantes a desarrollar gradualmente una comprensión de la demostración que sea consistente con la compartida y practicada en las matemáticas contemporáneas"

Sin embargo, en el momento que los estudiantes empiezan a interactuar con las demostraciones, se encuentran con dificultades para validar argumentos matemáticos porque hallan las demostraciones confusas, o sin sentido; sumado a que poseen carencias de conocimiento sobre las definiciones de términos y declaraciones, cómo usarlos en una demostración, falta de comprensión de los conceptos, métodos de demostración y falta de generación y uso de ejemplos (Moore, 1994 y Conradie & Frith, 2000).

Por lo general, en las aulas de matemáticas las demostraciones son presentadas a manera de conferencia. Alcock (2009) encontró tres problemas en relación con ello: el primero relacionado con la precisión de la atención que prestan los estudiantes, el siguiente se refiere a la velocidad de comprensión de las relaciones lógicas requiriendo que sea en tiempo real. Otro aspecto está enlazado con lo efímera que pueden ser las explicaciones, señalando la dificultad que presentan los estudiantes al momento de retomar sus notas y tener que realizar su comprensión en el tiempo independiente con poca instrucción acerca de cómo abordarla (p. 4).

Sin embargo, aún no existe un consenso sobre qué significa comprender una demostración matemática y cómo los estudiantes comprenden una demostración dada, puesto que, por lo general la comprensión de los estudiantes se mide pidiéndoles que reproduzcan o hagan ligeros cambios al momento de demostrar un teorema similar, dando cómo resultados una visión superficial de la comprensión lectora de los estudiantes. Estos hallazgos sugieren que se necesitan formas más sofisticadas de evaluar la comprensión de una demostración por parte de los estudiantes (Conradie & Frith, 2000; Rowland, 2001; Schoenfeld, 1988 y Weber & Mejía-Ramos, 2011).

En la Universidad Francisco de Paula Santander (en adelante UFPS), Cúcuta - Colombia, se ha encontrado que existen muy pocos estudios relacionados con la didáctica de la actividad demostrativa en el programa de Licenciatura en Matemáticas, además muchos estudiantes han presentado dificultades en el proceso del aprendizaje de las demostraciones, hecho que expone Hernández-Suarez (2012) donde los resultados obtenidos muestran que aunque los estudiantes tienen una buena predisposición en actitudes y creencias hacia la actividad demostrativa; el conocimiento y uso del lenguaje matemático y la habilidad para hacer demostraciones no es lo satisfactorio; en sus recomendaciones propone la necesidad de cambiar las metodologías utilizadas y la creación de una línea de investigación que apoye este proceso. Paralelamente, en un estudio realizado por el Laboratorio de Economía de la Educación (LEE) de la Pontificia de la

Universidad Javeriana (2020), muestran que los estudiantes pertenecientes a los programas correspondientes a las ciencias de la educación, tienen los puntajes más bajos en razonamiento cuantitativo y lectura crítica respecto a las otras áreas de conocimiento en las pruebas Saber Pro, teniendo relación directa con los resultados que han obtenido dichos estudiantes en matemáticas y lenguaje en la prueba presentada al culminar sus estudios de educación media, Saber 11. Como posibles soluciones Mejía-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff (2012) han proporcionado un modelo teórico de evaluación para la comprensión de las demostraciones y Hodds, Alcock & Inglis, (2014) han propuesto un entrenamiento de autoexplicación que busca favorecer dicha habilidad. Con el propósito de contribuir a la comunidad de educación matemática con respecto a la comprensión de las demostraciones matemáticas, partiendo de las características encontradas en el problema y de los estudios citados en este párrafo nos surgen las siguientes preguntas:

1.3. Formulación del problema

¿Cómo cambia la comprensión de las demostraciones matemáticas de los estudiantes, antes y después de un entrenamiento de autoexplicación?

¿Cuál es el impacto de las estrategias del entrenamiento de autoexplicación en la comprensión de las demostraciones matemáticas en nuestro contexto?

¿Cómo asimilan los estudiantes las estrategias del entrenamiento de autoexplicación?

1.4. Delimitación

1.4.1. Delimitación espacio - temporal

La investigación se desarrolló en la Universidad Francisco de Paula Santander, en su sede ubicada en la ciudad de San José de Cúcuta, Norte de Santander, Colombia. Se toma como población los estudiantes matriculados en el programa de Licenciatura en Matemáticas. Para llevar a cabo este estudio fue importante que los estudiantes hayan cursado y aprobado la asignatura de Teoría de Números.

1.4.2. Delimitación conceptual

Para el desarrollo del estudio se utilizaron cómo base los siguientes conceptos:

- *Comprensión de las demostraciones matemáticas*: Mejía-Ramos et al. (2012) en su modelo teórico propone que debe ser evaluada a partir de siete tipos diferentes de dimensiones. Tres de ellas relacionadas con identificar y comprender aspectos superficiales de una demostración, tales cómo, términos y definiciones, estado lógico, entre otros. Las dimensiones restantes implican realizar inferencias de las ideas o métodos que motivan una parte importante de la demostración o la demostración en su totalidad. Este modelo es el resultado de analizar los diferentes tipos de comprensión que son valorados por matemáticos y educadores matemáticos, en lo que consideran, deben desarrollar los estudiantes de pregrado al realizar lecturas de matemáticas avanzadas.
- *Autoexplicación*: El concepto de autoexplicación se ha ido construyendo empíricamente, siendo utilizada cómo estrategia en diferentes áreas de conocimiento, y aplicada cómo una herramienta importante por su capacidad de poner a discusión los conocimientos previos con los nuevos conocimientos en el proceso de aprendizaje. Una autoexplicación es el conocimiento generado por los estudiantes que establece algo más allá de la información que se les da (Ainsworth & Burcham, 2007)

1.5. Justificación

La formación en el programa de Licenciatura en Matemáticas está orientada a que los profesionales egresados posean competencias investigativas en el campo pedagógico cómo en el campo disciplinar, sin embargo, los profesores en formación presentan dificultades en las asignaturas que corresponden al dominio matemático, en donde la mayoría se requiere de la actividad demostrativa.

Teniendo en cuenta la recomendación dada en (Hernández-Suárez, 2012), donde expone la necesidad de que los docentes y los libros de texto presenten de una manera diferente las demostraciones, es conveniente la presente investigación al experimentar con estrategias que ayuden a los estudiantes en la comprensión de las demostraciones matemáticas y de ese modo tengan las herramientas para construir su propio conocimiento.

Como bien se observó en el problema de investigación, la comprensión de las demostraciones es un tema que se ha tratado desde hace varias décadas y se han identificado varias maneras de abordarlo. Sin embargo, en la UFPS aún no han sido desarrolladas investigaciones al respecto, siendo este un estudio pionero al proporcionar un acercamiento al problema expuesto, mediante la implementación de metodologías y teorías trabajadas principalmente por investigadores adscritos a universidades pertenecientes a Estados Unidos e Inglaterra.

Por otra parte, la información que se obtenga puede servir para sustentar y apoyar teorías existentes en la comprensión de las demostraciones matemáticas al experimentar con su aplicación en nuestro contexto. Por lo anterior, servirá como antecedente y de base para continuar en estudios tanto de pregrado cómo de postgrado para demás investigaciones interesadas en el área.

Cabe resaltar que los potenciales beneficiarios son en un primer momento los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la UFPS, también las instituciones educativas públicas y privadas de la región, al obtener profesionales en educación matemática con un dominio disciplinar más profundo lo que ayuda a la reproducción de la ciencia en la sociedad, así como los docentes y docentes en formación interesados en poner en práctica y profundizar acerca de las teorías expuestas.

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo general

Describir los cambios de la comprensión de las demostraciones matemáticas antes y después del entrenamiento de autoexplicación.

1.6.2. Objetivos específicos

Determinar el estado de los estudiantes en torno a las dimensiones propuestas en el modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones

Comprobar la influencia del entrenamiento de autoexplicación en los procesos de comprensión de las demostraciones.

Analizar las vivencias de los estudiantes con las estrategias del entrenamiento de autoexplicación y la comprensión de las demostraciones.

2. Marco referencial

2.1. Estado del arte

La definición de comprensión desde la Real Academia de la Lengua Española (RAE, s.f, definición 2) es expuesta cómo: "facultad, capacidad o perspicacia para entender y penetrar las cosas", sin embargo, esta definición se encuentra muy limitada para entender su significado en el ámbito educativo. En la Encyclopedia of the Sciences of Learning (Sparks, 2012) se encuentra el concepto de comprensión del discurso, por el cual se refiere a "hacer inferencias para conectar ideas tanto dentro como a través de contextos discursivos locales y globales" (p. 1713), en donde se establecen conexiones entre los anteriores con los nuevos, y así construir representaciones coherentes con los conceptos que se describen en un texto, para que la representación de estos pueda recuperarse, actualizarse, manipularse y aplicarse para responder a preguntas y resolver problemas.

En el caso de las matemáticas, cuando los estudiantes establecen relaciones con objetos matemáticos y producen narrativas respaldadas sobre el objeto en cuestión, generalmente se realizan de acuerdo con meta-reglas bien definidas, de esta forma están aprendiendo a manejar un discurso matemático (Ben-Zvi & Sfard, 2007). Por lo cual, las concepciones de dichos objetos han tenido transformaciones, mostrando diferencias en el discurso y en el contexto en el que se desarrollan (Harel & Sowder, 2007).

En relación con las demostraciones en matemáticas Balacheff (1987) hace la diferenciación entre *explicación*, *prueba* y *demostración*, donde la *explicación* es un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, una *prueba* es una explicación aceptada por una comunidad determinada en un momento determinado y la *demostración* es una prueba con enunciados organizados mediante reglas de deducción. Selden & Selden (2017) realizaron una revisión de la literatura existente acerca de la comprensión de las demostraciones matemáticas, dando como resultados una diferenciación entre cuatro conceptos que abarcan distintos aspectos relacionados a la actividad demostrativa, tales como la comprensión, construcción, validación y la evaluación de las demostraciones.

La comprensión de las demostraciones ha sido descrita en términos pragmáticos en el modelo de evaluación de la comprensión (Mejía-Ramos et al. 2012) incluyendo desde la comprensión local hasta una comprensión holística de una demostración matemática. Cabe resaltar que, en el marco conceptual y en el marco teórico se profundiza acerca de este modelo. Otro término asociado en la actividad demostrativa es la construcción de las demostraciones, que significa intentar construir demostraciones correctas al nivel esperado de los estudiantes universitarios de matemáticas (Selden & Selden, 2017) o en palabras de Hodds et al. (2014) se relacionan con la creación de un argumento que intenta probar un teorema dado.

Por otra parte, Selden & Selden (2017) expresan que la validación de las demostraciones se ha descrito como la lectura y la reflexión sobre los intentos de prueba para determinar su exactitud. Por último, la evaluación de demostraciones ha sido descrita por Pfeiffer (2011) como la determinación de si una demostración es correcta y también qué tan buena es con respecto a una gama más amplia de características tales como claridad, contexto, suficiencia sin exceso, perspicacia, convencimiento o mejora de la comprensión.

Aunque existe este estudio de revisión enfocado en el análisis de estos cuatro conceptos, aún no se ha realizado un trabajo que resuma los diferentes aportes acerca de la comprensión de las demostraciones. Por ello, se desarrolló como producto de investigación una revisión descriptiva de la literatura que permita analizar cuáles han sido las formas de investigar la comprensión de las demostraciones matemáticas en la educación superior. El artículo de revisión titulado "*La comprensión de las demostraciones matemáticas. Un estudio de revisión*" es presentado en este proyecto como el estado del arte.

2.1.1. Metodología estado del arte

Teniendo en cuenta la clasificación dada por Guirao-Gori, Olmedo Salas & Ferrer Ferrandis (2008), el presente trabajo es una revisión descriptiva puesto que: "proporciona al lector una puesta al día sobre conceptos útiles en áreas en constante evolución" (p. 6), adicionalmente es de tipo documental dado que el procedimiento implica el rastreo, organización, sistematización y análisis de un conjunto de documentos electrónicos (Sánchez Upegui, 2011) sobre el tema de comprensión de las demostraciones en estudiantes de educación superior.

Para la búsqueda de los documentos bibliográficos sobre el tema, se utilizaron las bases de datos: Google Scholar, Funes, Springer, Eric, Taylor y Francis Online, Semantic, Jstor, Sciencedirect, Researchgate, entre otros.

Los principales términos de búsqueda, se incluyeron las siguientes palabras claves: *Comprensión de las demostraciones*, *comprensión de la prueba*, *las demostraciones*, the *proof*, *comprehension proof*, *comprehension math proo*f y *comprehension proof pre-service teacher*. Se utilizaron en diferentes combinaciones los anteriores términos, de modo que permitió ampliar los criterios de búsqueda y encontrar más documentos.

En el momento de realizar la búsqueda de los documentos en las bases de datos anteriormente nombradas, se realizó la selección de documentos, posteriormente se adelantó una revisión a los artículos citados dentro de estos documentos, estableciéndose relaciones bidireccionales entre los aportes dados por los diferentes autores. Para la revisión, no se tuvo en cuenta los artículos que no estaban relacionados con el tema. Con el fin de organizar los documentos, se utilizaron las siguientes categorías de análisis tales como: título del artículo, autor, año, revista, problema y objetivo de investigación, teorías utilizadas y su aplicación, participantes (nivel educativo), diseño de la investigación, técnicas de recolección de información, técnicas de análisis de datos y los hallazgos encontrados. Una vez ordenada la información, se agruparon los artículos en cuatro enfoques.

2.1.2. Desarrollo

Entre los intentos de mejorar la comprensión de las demostraciones de los estudiantes, se pueden distinguir cuatro enfoques, las investigaciones centradas en el cambio de la presentación del contenido, las investigaciones centradas en un cambio del modelo de evaluación, las investigaciones que usan modelos cognitivos para estudiar la comprensión de las demostraciones y estudios que abordan la comprensión de la demostración en la educación superior.

2.1.2.1. Investigaciones centradas en el cambio de presentación de contenido

Leron (1983) observó que las demostraciones matemáticas que se presentan en los libros de texto y artículos de revista son lineales, es decir, van desde una hipótesis hasta la conclusión, sin embargo, desde su experiencia cómo docente universitario, observó que los estudiantes no son capaces de descubrir cuál es la estructura que se encuentra implícita en una demostración, siendo esté un elemento importante para su comprensión. Por esto, propone un método alternativo, denominado *método estructural* con el cual pretende aumentar la comprensibilidad de las demostraciones matemáticas sin perder su rigor. Esta metodología consiste en organizar la información otorgada por demostración en tres niveles, de arriba hacia abajo; los niveles mismos consisten en *módulos* autónomos cortos.

En el primer nivel se plasma la idea principal de la demostración, buscando dar un resumen o una visión global, por lo general suele consistir en la construcción de un nuevo objeto intermedio que está directamente conectados con todas sus partes, ofrece un punto de vista de ver la arquitectura global de la demostración. El principal beneficio de las presentaciones en el estilo estructural es que las ideas que hay detrás de las pruebas formales se comuniquen mejor.

Con el tiempo, Rowland (2001) expone que por regla general, se espera que los estudiantes adquieran el conocimiento de los procedimientos de demostración matemática por un proceso de ósmosis, trayendo cómo consecuencia que la demostración sea inaccesible como dimensión de su vida matemática activa, concordando con Hersh (1993) el cual sostiene que, en el contexto de enseñanza, el propósito principal de la demostración es explicar, iluminar por qué algo es así, más que tener la seguridad de que es así. Por esto propone las demostraciones genéricas en el aprendizaje de la teoría de números, las cuales define cómo seleccionar cuidadosamente un ejemplo particular que permita ver la estructura general de la demostración, junto con el uso de ejemplos genéricos, que son un aplicación real de la demostración, pero presentados de tal manera que pone de manifiesto su función de portador de lo general como posible estrategia para la enseñanza de las demostraciones matemáticas y la información encontrada en los libros de texto.

Recientemente con la idea de entrelazar los recursos tecnológicos con las demostraciones matemáticas Alcock (2009) propone un medio interactivo denominado *e-proof* para presentar la demostración las cuales consisten en una secuencia de pantallas donde: cada pantalla muestra el teorema y la demostración completa, pero gran parte de esto está atenuado para enfocar la atención en líneas particulares resaltando sus relaciones y enlaces lógicos entre ellas. Cada pantalla es también acompañada de un archivo de audio que replicará la explicación dada de forma expositiva por el docente en el aula. En estudios posteriores la autora junto con otros investigadores, encontraron que de manera inmediata no era muy significativa la comprensión lograda con respecto a estudiantes que solo leían las demostraciones de los libros; y a largo plazo, no presentan resultados favorables, ya que encontraban muy clara e inmediata la información en la demostración, lo que reducía las horas de estudio por parte de los estudiantes.

2.1.2.2. Investigaciones centradas en el cambio del modelo de evaluación.

Conradie & Frith (2000) investigadores de la universidad de Sudáfrica, publicaron un artículo en donde señalan que observaron las formas tradicionales de evaluación generalmente conducen a estrategias de aprendizaje de memoria con poca comprensión. Además de destacar la importancia de la comprensión de las demostraciones, resaltan que su ventaja está en la mejora de la calidad de retroalimentación tanto para el estudiante como para el profesor de esta forma de evaluación.

Por su parte Yang & Lin (2007) plantearon un modelo que trata sobre la comprensión de las demostraciones en geometría al nivel de la educación en secundaria, este modelo está compuesto de cuatro niveles: En el primer nivel denominado superficie, los estudiantes adquieren conocimientos básicos sobre el significado de declaraciones y símbolos en la demostración. El segundo le llamaron reconociendo los elementos y los estudiantes identifican el estado lógico de los enunciados que fueron utilizados explícita o implícitamente en la demostración. El tercer nivel denominado encadenando los elementos, los estudiantes comprenden la forma en que estos diferentes enunciados están conectados en la demostración identificando las relaciones lógicas entre ellos; y el cuarto nivel al que se refirieron como encapsulación en el que median si los estudiantes interiorizan la demostración como un todo al reflexionar sobre cómo se puede aplicar la prueba a otros contextos. Sin embargo, Yang & Lin

(2007) indicaron que su instrumento para medir a los estudiantes no tenía como objetivo diagnosticar si un estudiante había alcanzado este nivel superior.

Mejía-Ramos et al. (2012) tomaron como base el trabajo realizado por Conradie & Frith (2000) y el trabajo de Yang & Lin (2007), para dar soporte a un modelo teórico de evaluación de la comprensión de las demostraciones a un nivel de educación superior. Los autores han proporcionado un modelo de evaluación para la comprensión de la demostración y, por lo tanto, describieron la comprensión de la prueba en términos pragmáticos incluyendo desde una comprensión local hasta una comprensión holística. Así, comprender una demostración desde la comprensión local implica que los estudiantes escriban el enunciado del teorema en sus propias palabras. Que conozcan las definiciones de términos clave en la prueba. Que conozcan el estado lógico de los enunciados de la prueba. Así como conocer el tipo de marco de prueba (por ejemplo, directo, contrapositivo, contradicción, inducción). También implica saber el cómo o por qué cada declaración se deriva de declaraciones anteriores (por ejemplo, hacer explícitas garantías implícitas). Por otro lado, la comprensión holística incluye ser capaz de resumir las ideas principales o clave de la prueba. Identificar subpruebas y cómo se relacionan con la estructura general de la prueba. Instanciar partes difíciles de la prueba con un ejemplo para ayudar a la comprensión. Proporcionar un resumen de la prueba. Usando las ideas de la prueba en otra prueba.

2.1.2.3. Modelos cognitivos que trabajan la comprensión de las demostraciones

En la búsqueda de literatura acerca de la comprensión de las demostraciones matemáticas se encuentran dos modelos teóricos que proponen formas de acercarse a la comprensión de las demostraciones a partir de modelos cognitivos.

El primero es la teoría APOS, cuya sigla traducida del inglés significa Acción, Proceso, Objeto y Esquema ; fue creada por Ed Dubinsky (1996) está basada en teorías neopiagetianas que describen cognitivamente cómo los estudiantes construyen o aprenden conceptos en matemáticas con base en sus estructuras previas, que a su vez evolucionan para formar otras formas de conocimientos (Arnon, Cottrill, Dubinsky., Oktaç, Fuentes., Trigueros, & Weller, 2014). Así, una acción es una transformación de objetos percibidos por el individuo como esencialmente externos y como requiriendo, ya sea explícitamente o de memoria, instrucciones paso a paso sobre cómo realizar la operación. Cuando se repite una acción y el individuo reflexiona sobre ella, puede hacer una construcción mental llamada proceso en el que el individuo puede pensar que realiza el mismo tipo de acción, pero ya no con la necesidad de estímulos externos. Un objeto se construye a partir de un proceso cuando el individuo se da cuenta del proceso como una totalidad y cuando el individuo se da cuenta de él como un total y reconoce el efecto que las transformaciones podrían tener en sí mismo. Finalmente, un esquema para un cierto concepto matemático es la colección de acciones de un individuo, procesos, objetos y otros esquemas que están vinculados por algunos principios generales para formar un marco en la mente del individuo que puede aplicarse a una situación problemática que involucra ese concepto. Esta teoría proporciona, además, un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de los datos.

El segundo se refiere a los esquemas de demostración de Harel & Sowder (1998), quienes, basándose en el componente social de las demostraciones, el concepto de conjetura y lo que es determinar y persuadir para el individuo, crearon los esquemas de demostración; estos consisten en la organización de los esquemas cognitivos que presentan los estudiantes al momento de construir una demostración. Cabe resaltar que se encuentran estructurados en tres categorías: convicción externa, prueba interna y prueba analítica; el primero está relacionado con los hábitos que priorizan el seguimiento de fórmulas para resolver problemas y aprendiendo de memoria, sumado a que el docente sea visto cómo la única fuente de conocimiento; el siguiente está relacionado cuando los estudiantes comprueban por sí mismos y persuaden a otros sobre la veracidad de una conjetura, evaluando cuantitativamente la conjetura en uno o más casos concretos; por último, la prueba analítica consta de las conjeturas mediante deducciones lógicas, lo que en otras palabras es utilizar las demostraciones matemáticas. Para estos autores, cada una de las categorías de esta clasificación representa una etapa cognitiva en el desarrollo matemático de los alumnos y que los esquemas axiomáticos son, epistemológicamente, una extensión de los transformacionales, de manera que estos últimos constituyen una etapa inevitable para alcanzar los primeros.

2.1.2.4. Estudios que abordan la comprensión de la demostración en la educación superior

Anteriormente se había mencionado que aún no existe un consenso sobre lo que significa comprender una demostración, sumado a que Mejía-Ramos & Inglis (2009) en su artículo destacan que encontraron poca literatura en educación matemática relacionada con la comprensión de las demostraciones; esta situación hizo develar el interés en investigadores conllevando la realización de estudios relacionados con: recopilar información centrada en el fenómeno, proponer modelos de evaluación, indagar sobre las estrategias que utilizan matemáticos expertos y estudiantes de alto rendimiento, comparar resultados entre el uso de una estrategia específica y la enseñanza tradicional.

Por ejemplo, en el estudio cuantitativo realizado por Hodds et al. (2014), tenían por objetivo validar sí el entrenamiento de la autoexplicación sería un método eficaz para mejorar la comprensión de las pruebas de los estudiantes de pregrado, para ello realizaron tres experimentos, los cuales partían de impartir la capacitación de entrenamiento de autoexplicación para luego validar su comprensión mediante el modelo de evaluación propuesto por Mejía-Ramos et al. (2012). En los experimentos 1 y 3, realizaron sesiones similares, en el cual los estudiantes eran seleccionados aleatoriamente para hacer parte del grupo control y el grupo que inicialmente recibió el entrenamiento de autoexplicación mediante una serie de diapositivas que lo describen, luego ambos grupos leían la demostración y por último presentaban la prueba.

Cabe aclarar que, en el experimento 1 evaluaron en la calidad de las explicaciones basándose en la categorización realizada por Ainsworth & Burcham (2007) mediante las grabaciones del pensamiento en voz alta, encontrando que el hecho de recibir capacitación en autoexplicación aumentó tanto el número como la proporción de explicaciones de alta calidad dadas por los participantes durante sus intentos de comprensión de pruebas. A diferencia del experimento 3, que lo llevaron a cabo en un entorno verdaderamente pedagógico, donde además realizaron una prueba retrasada 20 días después, encontrando que el entrenamiento de autoexplicación en un entorno pedagógico típico mejoró significativamente la comprensión de la prueba a corto plazo y tuvo efectos duraderos

Desde otra perspectiva relacionada con el estudio de la comprensión de las demostraciones Weber (2015) realizó un estudio exploratorio en donde se propuso desarrollar hipótesis fundamentadas sobre qué estrategias de lecturas pueden ser útiles para la comprensión de las demostraciones. Como marco teórico utilizó el modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones propuesto por Mejía-Ramos et al. (2012) para validar sus estrategias. En el estudio empleó una metodología cualitativa, seleccionando cuatro estudiantes de último año del programa de Licenciatura en Matemáticas con las condiciones de tener un alto rendimiento académico y que ya hayan participado en estudios anteriores realizados por el autor.

Para identificar tales estrategias, el autor realizó un registro en un entorno en el que probablemente se provocarán las estrategias. Por esta razón, eligió grabar en video articulaciones exitosas en matemáticas mientras pensaban en voz alta mientras leían seis demostraciones de cálculo y teoría de números básica con las condiciones de que cuya veracidad no sería inmediatamente obvia para un estudiante universitario, y que emplea una técnica de demostración interesante con la que esperaba que los participantes no hubieran tenido una amplia experiencia. Es importante resaltar que en cada prueba se basó en el modelo de comprensión de Mejía-Ramos et al. (2012) para generar el conjunto de preguntas. Como hay pocos estudios empíricos sobre comprensión de pruebas (Mejía-Ramos & Inglis 2009), optó por utilizar un esquema de codificación abierto al estilo de Strauss & Corbin (1990).

Esta investigación arrojó como resultado que, se hallaron seis estrategias de lectura, estas son: estrategia no 1. Comprender el enunciado del problema; la estrategia no. 2. Intente probar el enunciado del teorema antes de leer su demostración; estrategia no 3. Considerar el marco de demostración utilizado; estrategia no 4. Dividir la demostración en partes o sub demostraciones; estrategia no 5. Usar ejemplos para dar sentido a las declaraciones dentro de la demostración; estrategia no 6. Comparar el método de la demostración con los métodos propios.

Partiendo de los hallazgos de los anteriores estudios Neuhaus & Rach (2019) realizaron una investigación donde tenían por objetivos encontrar la correlación entre las estrategias de lectura encontradas por Weber (2015), el entrenamiento de autoexplicación de Hodds et al. (2014) y el modelo de evaluación de Mejía- Ramos et al. (2012) y por otra parte, también se centraron en la correlación de sus características individuales (como el autoconcepto, el interés o el conocimiento previo) y la comprensión de las demostraciones . Para realizar la investigación tomaron cómo muestra 64 estudiantes en segundo semestre de una universidad en Alemania, donde todos los estudiantes habían asistido a las mismas conferencias, donde el contenido incluye Análisis I.

En la investigación utilizaron dos instrumentos para revisar el uso de las estrategias de lectura, el primer instrumento es una prueba de comprensión que constaba de 10 preguntas sobre el teorema del valor medio, donde inicialmente fue revisado por expertos y posterior a ello se tomaron en cuenta las correcciones para mejorar la prueba; el segundo instrumento fue una escala Likert con 22 ítems que cubren diferentes tipos de estrategias de lectura, usando ideas de una prueba de comprensión lectora en alemán, el entrenamiento de autoexplicación de Hodds et al. (2014), y las estrategias de lectura efectivas esperadas (i) - (iii) del estudio de Weber (2015). Además, para medir las características individuales los estudiantes se sometieron a una prueba para examinar sus conocimientos previos en análisis (Rach & Heinze, 2017), sumado a las preguntas sobre sus calificaciones en matemáticas al finalizar su etapa escolar y curso de análisis I, interés en las matemáticas escolares y universitaria, su autoconcepto en relación con la prueba, a la escuela respectivamente la matemática universitaria en general y su satisfacción referente a su carrera universitaria.

En el análisis de los resultados no encontraron correlaciones positivas entre la comprensión de las demostraciones y el interés de los estudiantes por las matemáticas universitarias o su autoconfianza matemática, sugiriendo que el interés en las matemáticas escolares y el interés en las matemáticas universitarias deben analizarse por separado. En las pruebas relacionadas con las estrategias encontraron que utilizaban una de las estrategias de Weber (2015) y ninguna basada en el entrenamiento de autoexplicación de Hodds et al. (2014), esto les hace concluir que tal vez las estrategias deben ser entregadas y practicadas por los estudiantes con anticipación para que puedan beneficiarse más de las pruebas.

Por otra parte Kolahdouz, Radmehr, & Alamolhodaei, (2019) observaron que los estudiantes de la universidad de Iran presentaban dificultades que estaban en concordancia con los estudios anteriormente mencionados, relacionadas con el aprendizaje memorístico de los teoremas y las demostraciones matemáticas, por esto realizaron una exploración de la comprensión relacionados con la demostración del Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy. Para llevar a cabo la investigación se basaron en el modelo de evaluación diseñado por Mejia- Ramos et al. (2012), para diseñar su prueba.

El estudio utilizó una metodología mixta, en el enfoque cuantitativo participaron 35 estudiantes que cursan Cálculo de una especialización de matemáticas, suministrándose es una prueba de comprensión y luego a 10 de ellos les realizaron una entrevista; luego realizaron un análisis inductivo, utilizando una codificación abierta, axial y selectiva. Cabe resaltar que en los resultados encontraron que los estudiantes no estaban preparados para responder ese tipo de preguntas, ya que tendieron a memorizar las pruebas y enfrentan dificultades al responder las preguntas que estaban fuera del aprendizaje memorístico.

Algunos estudios más recientes han abarcado este tema buscando la relación de la comprensión de las demostraciones con el razonamiento cuantitativo. Así, Belin & Akar (2020), investigadores de la Universidad de Bósforo, partían de las dificultades que tanto estudiantes como profesores tienen en los procesos de demostración. Tales dificultades incluyen la falta de conocimiento sobre las definiciones de términos y declaraciones, y cómo usarlos en la demostración; falta de comprensión de los conceptos; y la falta de generar y usar los propios ejemplos de los estudiantes sobre la declaración de prueba (Moore, 1994). Por ello su objetivo de estudio fue investigar el efecto del razonamiento cuantitativo en la comprensión de los futuros profesores de matemáticas de una demostración en números reales. Su soporte teórico está en la teoría del razonamiento cuantitativo (Thompson, 1994) y en el modelo de evaluación de la prueba de comprensión (Mejia-Ramos et al., 2012).

Para realizar este trabajo, usaron un enfoque mixto con un diseño experimental integrado en el que tomaron a 19 participantes a los que le aplicaron pruebas de comprensión antes y después de una instrucción sobre métodos de enseñanza, la instrucción fue de cinco horas separados en dos sesiones en la que trabajaron el tema de los números reales. Posteriormente a seis participantes les aplicaron entrevistas semiestructuradas. Para cuestiones de validez sometieron las pruebas de comprensión a ser validadas por dos matemáticos y un educador de matemáticas. Como conclusión los investigadores encontraron progreso en las habilidades de comprensión desde la prueba previa a la posterior.

2.1.3. Conclusiones

En la búsqueda de artículos referidos al núcleo temático de la investigación, es importante resaltar que existe una cantidad limitada en idioma español en comparación con los artículos en inglés. A pesar de que se utilizaron descriptores en español en las bases de datos, los resultados generalmente se relacionaban con la utilización de estrategias didácticas que se enfocan en la construcción o validación de las demostraciones.

También se encontró importante hacer una distinción al concepto de comprensión de la demostración, pues la mayoría de trabajos previos a los modelos de evaluación asumen la comprensión a partir de evaluar la forma en cómo los estudiantes construían demostraciones o validaron estas, pero desde un enfoque memorístico prestando poca atención a la comprensión lectora que poseen los estudiantes.

Al interior de los programas de pregrado que incluyen asignaturas cuyo objeto de estudio son las demostraciones, es menester que se generen estrategias didácticas y fomente el uso de modelos de evaluación que promuevan la comprensión, en concordancia con Hersh (1993), su uso debe tener cómo propósito comunicar y exponer cómo y porqué las generalizaciones y reglas utilizadas funcionan para hacer representaciones de la realidad, con la finalidad de que los estudiantes puedan resolver problemas; pero, esto solo es posible si ellos alcanzan a comprender cómo se construyen y cómo se relacionan con otras demostraciones. Por lo anterior es importante que en el desarrollo de los estudios de pregrado dicho contenido sea llevado a cabo desde un enfoque que promueva su comprensión.

De lo anterior, se propone la creación de líneas de investigación que tengan como objeto de estudio la comprensión de las demostraciones, desde el enfoque de los modelos de evaluación que se centran en lograr en los estudiantes una comprensión local y holística de una demostración dada, pues se considera que para programas de pregrado deberían tener mayor importancia que otras actividades demostrativas.

2.2. Marco conceptual

2.2.1. Demostración

Desde el punto de vista de Harel y Sowder (2007) las demostraciones tienen un concepto social, en el sentido que se ofrece cómo un argumento convincente que debe ser aceptado por otros. Sin embargo, en la evolución de las diferentes corrientes de las matemáticas se muestran diferencias en el discurso y en el contexto en el que se desarrollan. Como fue expuesto en el estado del arte, Balacheff (1987) hace la diferenciación entre explicación, prueba y demostración.

La explicación es “un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el hablante, de una proposición o de un resultado. Las razones dadas pueden discutirse, rechazarse o aceptarse”, por otra parte, pone en contraste lo que representa una prueba y una demostración, exponiendo que una prueba “es una explicación aceptada por una comunidad determinada en un momento determinado” resaltando que “Esta decisión puede ser objeto de debate, cuyo significado es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores”, está particularidad destaca el carácter social de la construcción de conocimiento.

Sin embargo, únicamente las explicaciones que toman una forma en específico pueden ser tenidas en cuenta cómo una prueba, en donde se encuentra cómo “una serie de enunciados organizados según reglas determinadas: se sabe que un enunciado es verdadero, o bien se deduce de los que le preceden mediante una regla de deducción tomada de un conjunto de reglas bien definido”, a esta configuración es lo que denominamos demostraciones.

Godino & Recio (2001) partiendo de los aportes dados por Balachef (1987) realizan un análisis de lo que es considerado como una demostración en los diferentes contextos institucionales, sin embargo, por los objetivos y la muestra poblacional a la que se dirige el estudio se hace énfasis en “la lógica y los fundamentos de las matemáticas como la enseñanza de las matemáticas”, destacando en cómo varía la concepción en función de las necesidades del campo.

En el contexto de lógica y los fundamentos de las matemáticas se presenta una concepción muy similar a la de Balacheff (como se citó en Godino & Recio, 2001), donde “la noción de demostración está íntimamente ligada a las nociones de deducción y de sistema axiomático (o formal)” (p.407), dicho sistema axiomático está conformado por un lenguaje simbólico, construido a partir de símbolos y reglas de formación que están perfectamente definidas, partiendo de dichos símbolos permitiendo llevar las deducciones a cabo, sumado a que existen unos enunciados denominados *axiomas*, los cuales son aceptados sin ninguna prueba de donde se desprenden los demás enunciados de la teoría. Recientemente, Weber, Inglis & Mejia-Ramos (2014) consideran la demostración como un argumento deductivo que pretende mostrar que una conclusión es una consecuencia lógicamente necesaria de los supuestos acordados.

Paralelamente, en el contexto de la enseñanza de las matemáticas destacan que en los niveles de educación primaria, secundaria y universitaria los conocimientos presentados en las asignaturas relacionadas con las matemáticas se consideran todos verdaderos. Cabe destacar que en los contextos institucionales de educación superior donde se espera que "los estudiantes adquieran la capacidad de comprender y realizar pruebas de teoremas matemáticos, que establezcan la verdad de los mismos con absoluta seguridad, convenciéndome a sí mismos y a cualquier persona de dicha verdad de manera irrefutable" (Godino & Recio, 2001, p.411), de modo que el estudiante sea capaz de determinar y persuadir al profesor "de la verdad necesaria y universal del teorema" (p.411).

2.2.2. Comprensión de la demostración

Tanto en el planteamiento del problema como en el estado del arte se han expuesto diversos acercamientos al concepto de la comprensión y específicamente la comprensión de las demostraciones matemáticas. Por tal motivo para efectos de este estudio se precisa el concepto desarrollado en el modelo de evaluación de la prueba de comprensión (Mejia-Ramos et al., 2012). Los autores han proporcionado un modelo de evaluación para la comprensión de la demostración y, por lo tanto, describieron la comprensión de la prueba en términos pragmáticos incluyendo desde una comprensión local hasta una comprensión holística de una demostración matemática.

Así, comprender una demostración desde la comprensión local implica que:

- Conozcan las definiciones de términos clave en la demostración.
- Identifiquen el estado lógico de los enunciados de la demostración. Así como que conozcan el tipo de marco de demostración (por ejemplo, directo, contrapositivo, contradicción, inducción).
- Determinen el cómo o por qué cada declaración se deriva de declaraciones anteriores (por ejemplo, hacer explícitas garantías implícitas).

Por otro lado, la comprensión holística incluye que el estudiante pueda:

- Resumir las ideas principales o clave de la demostración.
- Identificar sub demostraciones y cómo se relacionan con la estructura general de la demostración.
- Instanciar partes difíciles de la demostración con un ejemplo para ayudar a la comprensión.
- Proporcionar un resumen de la demostración usando las ideas de la demostración en otra demostración.

Cada uno de estos componentes será descrito en mayor detalle en el apartado del marco teórico de esta investigación.

2.2.3. Autoexplicación

Chi, Bassok, Lewis, Reimann & Glaser (1989) desarrollaron el concepto de autoexplicación, definiendola como: generar explicaciones para uno mismo en un intento de dar sentido a información relativamente nueva (Chi, de Leeuw, Chi & LaVancher, 1994; Rittle-

Johnson, 2006), considerándose cómo una actividad de aprendizaje constructivista, porque el estudiante da explicaciones en formas de inferencias que van más allá de la información otorgada, en otras palabras, es un resultado adicional que contiene más información de la proporcionada por el texto original (Fonseca & Chi, 2011).

Es necesario hacer aclaración de que no todas las verbalizaciones son explicaciones. La relectura del texto no se considera autoexplicación, ni está informando cuál fue el método de solución (es decir, los informes de estrategia). También es importante distinguir las autoexplicaciones de otros tipos de explicaciones. Las autoexplicaciones son "*generadas por el estudiante",* en lugar de por un instructor, padre u otra persona que ya conoce el contenido, y se "*generan para el estudiante",* no pretende enseñar el contenido a otras personas (Chi et al., 1994).

Algunas de las verbalizaciones que no son explicaciones pueden ser clasificadas en monitoreo o parafraseo. Hodds (2014) en su tesis doctoral expone que el monitoreo consiste en exponer o decir que se está comprendiendo lo que se acaba de leer. Por otra parte, en el parafraseo el estudiante utiliza palabras diferentes para describir lo que ya está representado en el texto. Sin embargo, en ninguna de las dos acciones se aporta nueva información a lo leído (pp.78-79). El autor hace diferenciaciones entre autoexplicaciones, monitoreo y paráfrasis, en su folleto de autoexplicación, y su adaptación es presentada en el **Anexo 1.**

Hodds et al. (2014) utilizaron las ocho categorías de Ainsworth y Burcham (2007) y fueron adaptadas siete de ellas al contexto de la comprensión de las demostraciones matemáticas y fueron agrupadas en dos super categorías llamadas: explicaciones y no explicaciones como se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Las categorías para clasificar las verbalizaciones dadas por los estudiantes

Categoría	Tipo	Definición (en el contexto de la comprensión de la demostración)
Basado en principios	Explicación	El participante dio una explicación basada en definiciones, teoremas o ideas que no están explícitamente en la demostración, por ejemplo, "... esto se debe a que, según la definición de..."
Orientado al objetivo	Explicación	El participante dio una explicación relacionada con la estructura de la demostración (cómo se utiliza para alcanzar el objetivo de demostrar el teorema).
Notar la coherencia	Explicación	El participante dio una explicación relacionada con una idea utilizada anteriormente en la prueba, por ejemplo, "... esto se debe a que en la línea 5 introducimos..."
Ningún comentario	No explicación	El participante no dijo ninguna palabra para la línea.
Explicación errónea	No explicación	El participante dio una explicación incorrecta.
Paráfrasis	No explicación	El participante se limitó a repetir la línea o parte de la línea utilizando palabras similares o las mismas palabras.
Monitoreo Positivo	No explicación	El participante dijo: "Lo entiendo", "Vale, esto tiene sentido" o algo similar.
Monitoreo Negativo	No explicación	El participante dijo: "No entiendo esto", "¿Cómo puede ser esto cierto?" o algo similar.

Nota: Adaptado de *Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension* (p.71), por Hodds, Alcock & Inglis, 2015, Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 62-101.

En el marco teórico, se explicarán sus implicaciones cognitivas, ventajas y limitaciones y las recomendaciones para educadores de matemáticas.

2.3. Marco Teórico

En el marco teórico se toma como base el modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones y el entrenamiento de autoexplicación.

2.3.1. Modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones

Mejía-Ramos et al. (2012) han proporcionado un modelo de evaluación para la comprensión de demostraciones y, por lo tanto, la describen en términos pragmáticos. Su modelo de evaluación se basa en dos artículos pioneros en esta área: el estudio de Conradie & Frith (2000) y Yang & Lin (2007). Los primeros autores fueron pioneros en proponer cómo parte del proceso evaluativo las pruebas de comprensión en matemáticas, además de enfatizar su importancia, estos investigadores proporcionaron ilustraciones de pruebas de comprensión para dos demostraciones diferentes.

Por su parte, Yang & Lin (2007) plantearon un modelo que trata sobre la comprensión de las demostraciones en geometría al nivel de la educación en secundaria, este modelo está compuesto de cuatro niveles: El primer nivel denominado superficie, el segundo le llamaron reconociendo los elementos, el tercer nivel denominado encadenando los elementos y el cuarto nivel, al que se refirieron como encapsulación, en el que valoran si los estudiantes interiorizan la demostración como un todo, al reflexionar sobre cómo se puede aplicar la demostración a otros contextos. Sin embargo, indicaron que su instrumento para medir a los estudiantes no tenía como objetivo diagnosticar si un estudiante había alcanzado este nivel superior.

El modelo de evaluación propuesto por Mejía-Ramos et al. (2012), busca adaptar el modelo propuesto por los anteriores investigadores para contextos en matemáticas avanzadas, lo que implica expandir su nivel de comprensión de encapsulación y reinterpretar los otros niveles para hacerlos más relevantes para la comprensión de demostraciones en matemáticas de pregrado.

A partir de esas consideraciones los componentes del modelo se separan en dos grupos. El primer grupo se centra en evaluar una comprensión local de los aspectos de la demostración, esto quiere decir, comprender que se puede discernir ya sea estudiando una declaración específica en la demostración o cómo esa declaración se relaciona con un pequeño número de otras declaraciones dentro de ella. En este apartado, los autores adaptan los tres primeros niveles del modelo de Yang & Lin para la comprensión de demostraciones más complejas que se encuentran en los cursos avanzados de matemáticas. El segundo grupo se centra en evaluar una comprensión holística de la demostración, la cual debe determinarse mediante la inferencia de las ideas o métodos que motivan una parte importante de la demostración, o la demostración en su totalidad.

El segundo grupo se genera mediante el estudio de los tipos de comprensión valorados por la comunidad de investigadores en educación matemática y los matemáticos que imparten cursos avanzados de matemáticas. Para ello, primero hicieron una revisión de la literatura de investigación en educación matemática sobre los propósitos de la demostración, posteriormente revisaron las recomendaciones de métodos alternativos de presentación de demostraciones y finalmente investigaron qué tipos de comprensión de demostraciones valoraban los matemáticos que imparten cursos avanzados de matemáticas. Como resultado de todo este proceso encontraron cuatro facetas: resumir la idea principal de la demostración, entenderla en términos de sus componentes o módulos, aplicar el método de la demostración en otros contextos e ilustrarla con ejemplos o diagramas (pp. 7-15).

Este modelo, propone entonces siete tipos de preguntas que se podrían emplear para evaluar la comprensión de los estudiantes de una demostración en matemáticas avanzadas. Cada uno de estos tipos mide una faceta diferente de la comprensión de la demostración; sin embargo, los autores aclaran que “no se debe ver estos tipos de evaluación como parte de una jerarquía, sino más bien como una medición de la comprensión de la demostración de los estudiantes en diferentes dimensiones.” (p. 5). A continuación, se considera cómo se puede evaluar la comprensión de las demostraciones matemáticas en estudiantes de pregrado.

2.3.1.1. Evaluación de la comprensión local de las demostraciones

En esta sección, se enfoca en tipos de preguntas para evaluar este tipo de comprensión; es decir, preguntas que abordan sólo una, o una pequeña cantidad de declaraciones dentro de la demostración.

Significado de términos y declaraciones.

Una de las formas más fundamentales de comprender cualquier tipo de texto es entender el significado de palabras y oraciones individuales. En el caso de la demostración, se puede evaluar la comprensión de un lector de este aspecto pidiéndole que identifique la definición de un término clave en la demostración, o que especifique qué se entiende por algunas de sus declaraciones, así como pedirle que identifique ejemplos que ilustran un término dado en la demostración o que enuncie una declaración dada de una manera diferente pero equivalente (Mejia-Ramos et al., 2012, pp. 7-8).

Estado lógico de declaraciones y marco de demostración.

En el contexto de las matemáticas avanzadas, el lector no solo debe identificar el estado lógico de los enunciados en las demostraciones, sino también reconocer la relación lógica entre el enunciado que se quiere demostrar, los supuestos y conclusiones de la demostración. Para reconocer esto es necesario comprender que:

> A proof framework is a way of structuring a proof in which the student begins by writing the first and last lines of a proof and works towards the middle. It often consists of a first level in which a student unpacks the logical structure of the theorem statement to write the first and last lines of the proof, and a second-level in which a student unpacks the definitions involved in the conclusion to write the second and second-to-last lines of the proof. Doing so often reveals to the student

> the “real problem” to be solved to complete the middle part of the proof . [Un marco de demostración es una forma de estructurar una demostración en la que el estudiante comienza escribiendo la primera y la última línea de una demostración y trabaja hacia el centro. Suele constar de un primer nivel en el que el alumno desgrana la estructura lógica del enunciado del teorema para escribir la primera y la última línea de la prueba, y un segundo nivel en el que el alumno desgrana las definiciones implicadas en la conclusión para escribir la segunda y la penúltima línea de la prueba. Al hacerlo, el alumno suele descubrir el "verdadero problema" que debe resolver para completar la parte central de la prueba.] (Selden & Selden, 2017, p. 7)

Este tipo de pregunta podría simplemente pedir a los estudiantes que nombren el tipo de demostración que se está empleando o pedirles que identifiquen el propósito de una oración dentro de un marco de demostración (Mejía-Ramos et al., 2012, pp. 8-9).

Justificación de reclamaciones.

En una demostración, los enunciados nuevos se deducen de los anteriores mediante la aplicación de principios matemáticos aceptados (por ejemplo, teoremas, reglas lógicas, manipulaciones algebraicas). En muchos casos, el lector necesita inferir qué declaraciones anteriores y principios matemáticos se utilizan para deducir una nueva afirmación dentro de una demostración. Por lo tanto, una dimensión de la comprensión de la demostración implica poder proporcionar justificaciones de cómo se siguen nuevas afirmaciones de las anteriores. En general, para evaluar hasta qué punto los lectores comprenden la justificación de las afirmaciones, se les puede pedir que hagan explícita una garantía implícita en la demostración, también se puede pedir que identifiquen los datos específicos que respaldan una afirmación determinada o pedirle al lector que identifique el lugar exacto en la demostración donde se emplea una determinada información como justificación de nuevas afirmaciones. (Mejía-Ramos et al., 2012, pp. 9-10)

2.3.1.2. Evaluación de la comprensión holística de las demostraciones

En esta sección, se desarrollan cuatro dimensiones diferentes para evaluar este tipo de comprensión en matemáticas de pregrado.

Resumen mediante ideas de alto nivel.

Una queja común acerca de la forma lineal en que las demostraciones se escriben convencionalmente es que enmascara las ideas de nivel superior contenidas en ella: al estudiar los detalles lógicos específicos de la demostración, se puede perder de vista el panorama general. Varios matemáticos indicaron que esta es una forma en que se puede leer o comprenderla, además, que esto es diferente a verificar los detalles lógicos de una demostración.

En general, evaluar a los lectores la comprensión de las ideas de alto nivel de las demostraciones puede implicar pedirles identifiquen o proporcionen un buen resumen de la demostración, para que esto se cumpla puede proporcionar varios resúmenes de la demostración y pedirle al estudiante que elija qué resumen captura la idea principal de la demostración. (Mejía-Ramos et al., 2012, pp.11-12).

Identificación de la estructura modular

Matemáticos indicaron que comprender una demostración implicaba dividir en componentes o módulos y luego especificar la relación lógica entre cada uno de los módulos. Para evaluar a los estudiantes la comprensión de las relaciones entre diferentes módulos en una demostración puede pedirle que la dividan en módulos, es decir, que la estructuren o pidiendo que identifiquen su propósito. En este caso, se podría pedir a un estudiante que identifique el papel de una parte determinada de la demostración dentro de su marco general. Estas partes pueden ser un lema, un caso específico en una prueba por casos, o cualquier tipo de sub demostración dentro de la demostración original (Mejía-Ramos et al., 2012, pp.12-13).

Transferir las ideas o métodos generales a otro contexto

Un aspecto importante de la comprensión de una demostración implica identificar los procedimientos utilizados y las formas en que estos procedimientos se pueden aplicar o reinterpretar para resolver otras tareas de demostración. Para evaluar a los estudiantes como identifican la estructura modular puede pedirles que transfieran el método, es decir poder aplicar con éxito el método en una tarea diferente o en un teorema similar y segundo, que aprecien el alcance del método, esto implica reconocer los supuestos que deben estar en su lugar para permitir que se lleve a cabo el método. Por ejemplo, pedirles que expliquen por qué el método utilizado en la demostración P del teorema no sería útil para demostrar el enunciado S (Mejía-Ramos et al., 2012, pp.13-14).

Ilustrar con ejemplos

Comprender una demostración a menudo implica comprender cómo se relaciona y podría ilustrarse con ejemplos específicos, es decir, poder seguir una secuencia de inferencias en la demostración en términos de un ejemplo específico. La idea de vincular demostraciones formales con imágenes u otros modelos informales es algo que tanto educadores de matemáticas y matemáticos argumentan es importante para desarrollar la comprensión. Las preguntas que se pueden emplear para evaluar a un lector la comprensión de esta dimensión requieren que ilustren una secuencia de inferencias con un ejemplo específico o que interpreten un enunciado o su demostración en términos de un diagrama cuidadosamente elegido. (Mejía-Ramos et al., 2012, pp.14-15)

Tabla 2. Codificación, definición y pregunta de ejemplo de las dimensiones propuestas por Mejía-Ramos et al. (2012)

Dimensión	Definición	Pregunta de ejemplo
D1: Significado de términos y declaraciones	Comprender el significado de símbolos, términos y definiciones.	¿Qué significa el símbolo ∃?
D2: Estado lógico de declaraciones y marco de demostración.	Comprender la relación lógica entre las líneas o componentes de una prueba.	¿Cuál es la relación lógica entre las líneas (LX) y (LY)?
D3: Justificación de reclamaciones	Comprender cómo las nuevas afirmaciones de la prueba se derivan de las anteriores.	En la demostración, ¿qué justificación mejor explica por qué ...?
D4: Resumen mediante ideas de alto nivel.	Identificar un buen resumen del enfoque general de la prueba.	¿Cuál de los siguientes es el mejor resumen de ...?
D5: Identificación de la estructura modular	Comprender los principales componentes y módulos de una demostración y la relación lógica entre ellos.	¿Cuál de las siguientes opciones explica por qué se incluyó ... en la prueba?
D6: Transferir las ideas o métodos generales a otro contexto	Aplicar los métodos de la prueba a un contexto diferente.	¿Podría utilizarse el método de la demostración aplicada en la línea X para demostrar ...?
D7: Ilustrar con ejemplos	Utilizar las ideas de la prueba en un ejemplo concreto.	Utilizando la lógica de la demostración, ¿cuál es la que mejor ejemplifica por qué $x = 5$ no es una solución de $f(x) = 30$?

Nota: Adaptado de *Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension* (p.66), por Hodds et al. , 2014, Journal for Research in Mathematics Education,

Los autores hacen aclaración que cada uno de estos tipos de preguntas mide una faceta diferente de la comprensión de la demostración, puede haber relaciones interesantes entre ellas, además, no existe un uso uniforme de estas evaluaciones, ya que algunas pruebas pueden no ser adecuadas para todo tipo de preguntas, por ejemplo, existen muchas demostraciones las cuales no sería apropiado relacionarla con un diagrama. Otras demostraciones más breves y sencillas, no sería posible dividirlo en módulos o sub demostraciones, por dar algunos ejemplos. Las dimensiones son resumidas por Hodds et (2014) en una tabla, en donde agregan una pregunta de ejemplo acerca de lo esperado por cada una de ellas. Además, de ahora en adelante serán referenciados cómo se presenta en la **tabla 2**.

2.3.2. Entrenamiento de autoexplicación

La autoexplicación es una estrategia de lectura utilizada por Hodds et al. (2014) en pos de la mejora en la comprensión de las demostraciones de estudiantes universitarios. El uso de esta estrategia surge debido a que normalmente la enseñanza de las demostraciones se presenta en forma de conferencias, trayendo consigo dificultades relacionadas con la precisión de la atención, velocidad de la comprensión y la fugacidad de las explicaciones (Alcock, 2009).

2.3.2.1. Implicaciones cognitivas

Se piensa que la autoexplicación promueve el aprendizaje a través de dos procesos primarios. En primer lugar, la autoexplicación ayuda a la comprensión mediante la promoción de la integración del conocimiento. En particular, las explicaciones a menudo integran fragmentos de nueva información con conocimientos previos. Además, cuando la nueva información entra en conflicto con conocimientos previos, los estudiantes tienen múltiples oportunidades de notar este conflicto e intentar resolverlo (Chi, 2000).

En segundo lugar, la autoexplicación ayuda a la comprensión y la transferencia guiando la atención a las características estructurales sobre las características de la superficie del contenido a ser enseñado (McEldoon, Durkin, & Rittle-Johnson, 2013; Rittle-Johnson, 2006; Siegler & Chen, 2008). Esto hace que el conocimiento sea más general, ya que está menos ligado a características problemáticas particulares, por lo que es más probable que se transfiera a nuevos problemas y situaciones. En resumen, la autoexplicación apoya la integración del conocimiento y/o la generalización del conocimiento.

2.3.2.2. Caracterización del conocimiento

En las investigaciones se encuentra clasificado y caracterizado el conocimiento en tres tipos, para así, medir los beneficios y limitaciones en el aprendizaje de la autoexplicación. Estos son: conocimiento conceptual, conocimiento de procedimiento y transferencia de procedimientos.

El término *conocimiento conceptual* ha llegado a abarcar no sólo lo que se conoce (conocimiento de los conceptos), sino también la forma en que los conceptos pueden conocerse (por ejemplo, en profundidad y con ricas conexiones) (Rittle-Johnson, & Schneider, 2015)

El conocimiento de los procedimientos: se define a menudo como el conocimiento de los procedimientos. Un procedimiento es una serie de pasos, o acciones, hechos para lograr un objetivo. Este conocimiento a menudo se desarrolla a través de la práctica de resolución de problemas, y por lo tanto está vinculado a tipos de problemas particulares (Rittle-Johnson & Schneider, 2015)

La transferencia de procedimientos es la adaptación y/o integración de procedimientos para resolver problemas con características estructurales y superficiales que difieren de la fase de aprendizaje (por ejemplo, requieren el uso de procedimientos aprendidos en nuevas combinaciones) (Rittle-Johnson, Loehr, & Durkin et al., 2017).

2.3.2.3. Recomendaciones para educadores de matemáticas

En el metaanálisis realizado por Rittle-Johnson et al. (2017) proponen las siguientes recomendaciones basándose en los diferentes hallazgos de investigaciones que han implementado la autoexplicación.

Explicaciones de alta calidad del andamio a través de la capacitación sobre autoexplicación o estructuración de respuestas de autoexplicación

Un enfoque de andamiaje es proporcionar capacitación sobre la autoexplicación de antemano. El entrenamiento de la autoexplicación a menudo incluye describir y motivar estrategias de autoexplicación, modelar el uso de las estrategias y practicar la autoexplicación. Las explicaciones de andamiaje mejoran la eficacia de las indicaciones para la autoexplicación, especialmente para mejorar el conocimiento conceptual (Rittle-Johnson et al. 2017)

Explicaciones de diseño para que no sacrifiquen la atención a otros contenidos importantes

Las indicaciones de autoexplicación influyen en el enfoque de la atención y el esfuerzo cognitivo de los estudiantes de formas particulares. Al centrar la atención en algunos tipos de información, se puede descuidar otra información. En particular, la explicación indica que la atención centrada en conceptos clave aumentó el conocimiento conceptual de los principios del dominio, pero también redujo el conocimiento procedimental, tanto en una tarea matemática como en una tarea de derecho tributario. Se destaca que las indicaciones para la autoexplicación centran la atención en aspectos particulares del material que se debe aprender. Puede haber costos ocultos que desvíen la atención de otra información importante, por lo tanto, las actividades de autoexplicación deben diseñarse para equilibrar cuidadosamente la atención a todo el contenido importante (Rittle-Johnson et al., 2017).

Indicar a los estudiantes que expliquen la información correcta

En la gran mayoría de los estudios experimentales sobre autoexplicación, se pedía a los alumnos que explicaran la información correcta. La información correcta solía ser ejemplos elaborados o respuestas correctas a problemas matemáticos.

Tres estudios han contrastado directamente el aprendizaje a partir de indicaciones para explicar la información correcta frente al razonamiento propio antes de la retroalimentación, y todos han informado de un mejor conocimiento procedimental cuando los alumnos explicaban la información correcta (Calin-Jageman & Ratner, 2005, Siegler, 1995, 2002 citados por Rittle-Johnson et al., 2017). En uno de estos estudios se conformaron 3 grupos de niños con 5 años de edad a los que se les pidió respectivamente que: explicaran las soluciones correctas después de intentar resolver por primera vez cada problema, explicaran su propia solución antes de la retroalimentación sobre su exactitud y resolvieran los problemas sin indicaciones para explicar (Siegler, 1995). Los niños que explicaron las soluciones correctas resolvieron sustancialmente más problemas correctamente que los niños que explicaron sus propias soluciones, al igual que aquellos niños a los que no se les pidió que explicaran. Las propias soluciones de los niños eran a menudo incorrectas, por lo que los niños en la condición de explicación propia dedicaron tiempo a justificar y hacer inferencias sobre la información que no era correcta.

En general, parece que pedir a los estudiantes que expliquen la información correcta, en lugar de su propio razonamiento, favorece el aprendizaje, al menos en parte porque es más probable que las explicaciones incluyan inferencias y generalizaciones correctas. Pedir a los estudiantes que expliquen sus propias soluciones o razonamientos es menos probable que mejore el aprendizaje si las soluciones e inferencias son a menudo incorrectas. Dado el riesgo potencial, recomendamos pedir a los estudiantes que expliquen la información que se sabe que es correcta. (Rittle-Johnson et al., 2017)

Indique a los estudiantes que expliquen por qué la información incorrecta es incorrecta si existen errores o conceptos erróneos comunes

Sin embargo, esto no significa que no se deba pedir a los estudiantes que expliquen información que se sabe que es incorrecta. Más bien, incluir indicaciones para explicar por qué es incorrecta, o en el caso contrario la razón por la cual es correcta. Este proceso de identificar la información incorrecta y transformarla por correcta puede mejorar el conocimiento conceptual o de procedimiento con respecto a no realizar alguna explicación o explicaciones de solo información correcta (Rittle-Johnson et al., 2017)

> For example, Algebra I students who were prompted to selfexplain incorrect worked examples gained better conceptual knowledge than students who were prompted to explain only correct worked examples on a computer tutoring system. [Por ejemplo, los estudiantes de Álgebra I a los que se les pidió que se autoexplicaran los ejemplos trabajados incorrectos obtuvieron un mejor conocimiento conceptual que los estudiantes a los que se les pidió que explicaran solo los ejemplos trabajados correctos en un sistema de tutoría por ordenador] (Booth et al., 2013 citado por Rittle-Johnson et al., 2017).

Los contrastes auto explicativos entre ejemplos correctos e incorrectos pueden ayudar a los estudiantes a distinguir ideas correctas e incorrectas al respaldar inferencias sobre sus diferencias, provocar mayores intentos de explicación que los ejemplos correctos por sí solos y reducir el uso de ideas y estrategias incorrectas (Rittle-Johnson et al., 2017)

3. Metodología

3.1. La Investigación Mixta

La investigación con métodos mixtos implica la recogida e integración de datos cuantitativos y cualitativos en un único proyecto y, por tanto, puede dar lugar a una comprensión más completa del fenómeno investigado. Se trata de un enfoque de investigación centrado en el problema, en el que los métodos y las teorías se utilizan de forma instrumental, en función de su aplicabilidad al estudio en cuestión. Los diseños de métodos mixtos valoran los enfoques cuantitativos y cualitativos de la investigación. Metodológicamente, sus enfoques se basan en la combinación de diseños deductivos e inductivos para generar datos cuantitativos y cualitativos, y la integración de los conjuntos de datos de alguna manera. Estos enfoques son apropiados cuando su propósito es describir, explicar o evaluar, y son especialmente útiles para estudiar problemas o cuestiones complejas. (Leavy, 2017, p. 135)

La investigación con métodos mixtos ofrece puntos fuertes que compensan los puntos débiles de la investigación cuantitativa y cualitativa. Se podría argumentar que la investigación cuantitativa es débil a la hora de comprender el contexto o el entorno en el que la gente habla. Además, las voces de los participantes no se escuchan directamente en la investigación cuantitativa. Por otra parte, los investigadores cuantitativos están en un segundo plano, y rara vez se discuten sus propios sesgos e interpretaciones personales. La investigación cualitativa compensa estos puntos débiles, considerándola deficiente debido a las interpretaciones personales del investigador, el consiguiente sesgo creado por ello y la dificultad de generalizar los resultados a un grupo grande debido al número limitado de participantes estudiados. En contraste con la investigación cuantitativa, no posee estas debilidades. Por lo tanto, la combinación de los puntos fuertes de un enfoque compensa los puntos débiles del otro. (Creswell & Plano Clark, 2011, p.47)

3.2. Nivel De Investigación

La investigación se realizó por medio de un estudio descriptivo correlacional. Arias (2012) expone que los estudios de tipo descriptivo “consisten en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento” (p.24). El nivel descriptivo ha sido utilizado por muchos investigadores educativos y conductuales para determinar cambios o alteraciones en las variables involucradas en sus respectivos campos (Borg & Gall, 1983, citado por Dulock, 1993).

Aparte de ello, la investigación descriptiva es caracterizada por Dulock (1993), enfatizando lo siguiente:

- No hay manipulación o control de las variables y, por tanto, no hay variable independiente. Puede haber una o más variables de resultado.
- El objetivo es describir una o más variables y/o determinar si existe una asociación entre ellas, sin embargo, no se pretende determinar las relaciones de causa y efecto.
- Por lo general, no se establece una hipótesis. El resultado final de un buen estudio descriptivo es desarrollar la base de datos a partir de la cual se pueden generar y probar hipótesis en futuros estudios.
- Los sujetos se seleccionan sobre la base de que poseen la información o las características (como los sentimientos, los valores, las actitudes o el estado de salud y enfermedad) en las que se centra el estudio.

Asimismo, Arias (2012) clasifica las investigaciones de nivel descriptivo en dos tipos: los estudios de medición de variables independientes y la investigación de tipo correlacional. Los primeros solo buscan observar y cuantificar características o variables en un grupo sin determinar relaciones entre estas, es decir, puede que no se establezcan hipótesis en este tipo de estudios aun cuando se evidencien las variables. Por el contrario, las investigaciones correlacionales tienen como objetivo determinar el grado de relación existente entre las variables sin que sea necesario que exista una correlación directa de causa y efecto entre ellas.

La segunda definición es compartida por la "Encyclopedia of Survey Research Methods" al definir los estudios correlacionales como:

> Correlational research is a type of descriptive nonexperimental research because it describes and assesses the magnitude and degree of an existing relationship between two or more continuous quantitative variables with interval or ratio types of measurements or discrete variables with ordinal or nominal type of measurements. Thus, correlational research involves collecting data from a sample of individuals or objects to determine the degree of the relationships between two or more variables for the possibility to make predictions based on these relationships. [La investigación correlacional es un tipo de investigación descriptiva no experimental porque describe y evalúa la magnitud y el grado de una relación existente entre dos o más variables cuantitativas continuas con mediciones de tipo intervalo o razón o variables discretas con mediciones de tipo ordinal o nominal. Así, la investigación correlacional implica la recogida de datos de una muestra de individuos u objetos para determinar el grado de las relaciones entre dos o más variables con el fin de poder hacer predicciones basadas en estas relaciones] (Lavrakas, 2018, p.728).

El nivel alcanzado en la presente investigación es el descriptivo correlacional, porque al ser un primer acercamiento con estrategias para la enseñanza y aprendizaje de las demostraciones matemáticas, implica que se realice como un estudio no experimental en donde no se tiene control sobre las variables estudiadas, cuyo propósito es determinar si existe algún tipo de correlación entre las estrategias del entrenamiento de auto explicación y la comprensión de las demostraciones.

3.3. Participantes y tipo de muestreo

El estudio se llevó a cabo con estudiantes de noveno semestre que se encontraban cursando la asignatura de Seminario Investigativo III durante el primer periodo académico del año 2022. La investigación se realizó por muestreo no probabilístico, es un procedimiento de muestreo que no ofrece una valoración de la probabilidad que tienen los elementos del universo de ser incluidos en la muestra del estudio. Dentro de los diferentes métodos de este tipo de muestreo se usa el denominado por conveniencia, este se basa en el juicio del investigador sobre quiénes proporcionarán la mejor información para lograr los objetivos del estudio. La persona que lleva a cabo la investigación debe centrarse en aquellas personas que tengan la misma opinión, que dispongan de la información necesaria y que estén dispuestas a compartirla. (Etikan & Bala, 2017)

3.4. Diseño De Investigación

Además de la selección del tipo de investigación es importante establecer el tipo de diseño a utilizar con base en la naturaleza de los datos a recolectar. Para poder alcanzar los objetivos del estudio se requirió que la información se obtenga desde la fuente primaria, por esto se tomó la decisión de utiliza un diseño de investigación de campo, que en palabras de Arias (2012), “implica tomarlos directamente de los sujetos investigados o de la realidad en donde ocurren los hechos, sin manipular o controlar variable alguna" (p. 31). Su objetivo principal es comprender sus actividades y lo que significan para quienes las realizan.

En adición a lo anterior, para seleccionar un diseño adecuado en las investigaciones mixtas la elección del diseño es preciso tomar las siguientes decisiones: primero, definir el momento en que se utilizan los datos recogidos, es decir, el orden en que se utilizan los datos en un estudio; la segunda decisión es determinar el peso relativo o ponderación de los enfoques cuantitativo y cualitativo, dicho de otro modo, es el énfasis que se le da a cada uno; y por último, el enfoque para mezclar los dos conjuntos de datos ,esto es, cómo se relacionarán, conectarán o combinarán los dos conjuntos de datos (Creswell & Plano Clark, 2011, p.78). En la figura 1 se presenta un árbol de decisiones, que puede ayudar a identificar las opciones para cada una de estas.

Los investigadores de métodos mixtos deben seleccionar un diseño específico para utilizar en sus estudios. Algunas veces los investigadores quieren utilizar más de uno de los tres diseños principales en un estudio o mezclar diferentes aspectos de los diseños. Sin embargo, es recomendado que se seleccione cuidadosamente un único diseño que se adapte mejor al problema de investigación. Esto hará que el estudio sea más manejable y más sencillo de aplicar y describir. Además, proporciona al investigador un marco y una lógica para guiar la aplicación de los métodos de investigación. (Creswell & Plano Clark, 2011, p.79)

A partir del árbol de decisiones mostrado en la figura 1, se determinó que el diseño de métodos mixtos con mayor ajuste es el diseño anidado, los cuales son aquellos en los que se utiliza un método como método primario y se recogen datos adicionales con el método secundario (Creswell & Plano Clark, 2007, p. 67). Puesto que, el propósito del proyecto se enfoca en la descripción de los cambios en la comprensión de las demostraciones utilizando las estrategias del entrenamiento de autoexplicación, implica que en un primer momento se debe determinar el impacto que tienen dichas estrategias en los estudiantes. En consecuencia, en esta etapa se pretende conocer desde un enfoque cuantitativo tal impacto.

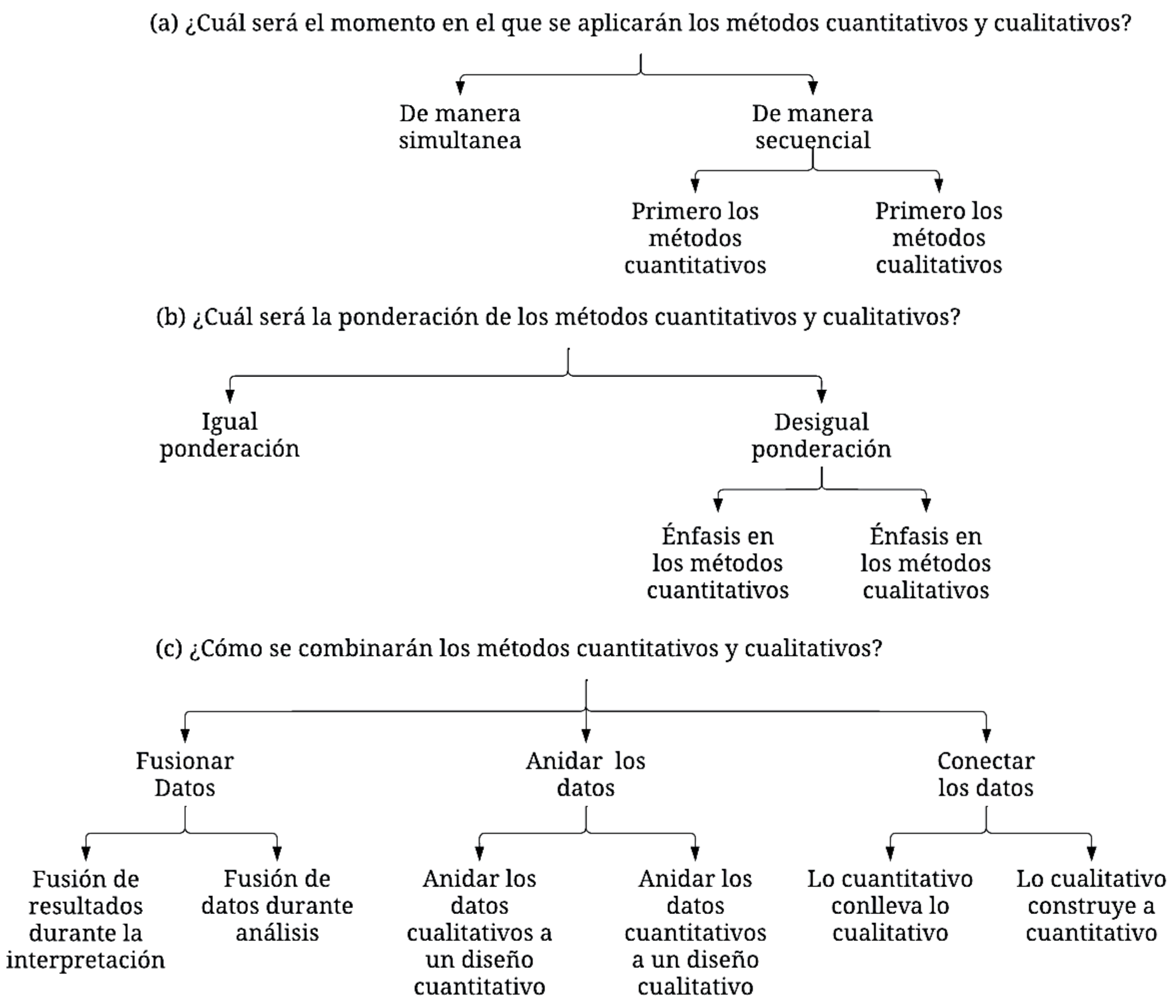


Figura 1. Árbol de decisiones para el diseño de métodos mixtos Criterios de tiempo, ponderación y combinación. Nota: Adaptado de *Decision Tree for Mixed Methods Design Criteria for Timing, Weighting, and Mixing* (p.80), por Creswell & Plano Clark, 2007, SAGE Publications.

De manera análoga, se pueden tomar dos alternativas, desde un enfoque cuantitativo mediante el uso de encuestas de satisfacción, o usando el enfoque cualitativo utilizando encuestas, puesto que la tercera pregunta expuesta en tal apartado, está relacionada con conocer la forma en cómo los estudiantes asimilan las estrategias de autoexplicación. Para aprovechar al máximo las ventajas dadas en los diseños mixtos se utilizan ambos métodos para conocer a fondo sobre las creencias y experiencias con las estrategias y modelos utilizados, y así poder ayudar a explicar las relaciones predictivas en el enfoque cuantitativo.

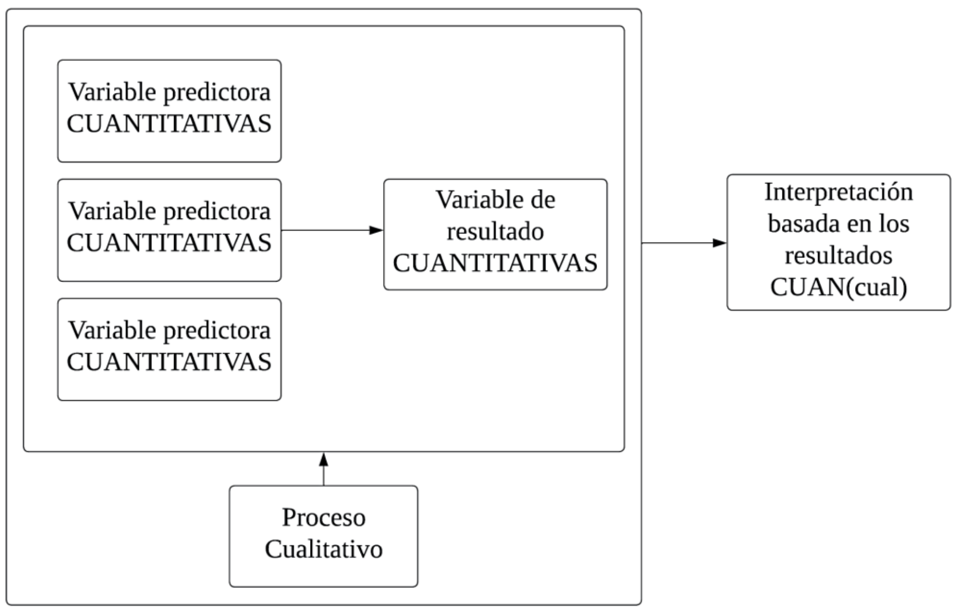


Figura 2. Modelo correlacional anidado. Nota: Adaptado de *The Embedded Design* (p.68), por Creswell & Plano Clark, 2007, SAGE Publications. Las *variables predictoras* son utilizadas para estimar, pronosticar o proyectar eventos o circunstancias futuras (Zedeck, 2014). En la investigación no experimental, suele ser más común etiquetar la variable independiente como la variable predictora o explicativa (Tavakoli, 2012)

Siguiendo a Creswell y Plano Clark (2007, p. 67) y lo expuesto anteriormente, se puede determinar que el diseño de la investigación está vinculado específicamente con el modelo correlacional anidado, que es otra variante integrada de los diseños anidados, en la que los datos cualitativos se integran en un diseño cuantitativo cómo es mostrado en la figura 2. En este diseño, los investigadores recogen datos cualitativos como parte de su estudio correlacional para ayudar a explicar cómo funcionan los mecanismos en el modelo correlacional. Cabe destacar que en este estudio se utilizaron las *variables predictoras*, las cuales son utilizadas para estimar, pronosticar o proyectar eventos o circunstancias futuras.

3.5. Etapas Y Técnicas De Recolección De La Información

Los estudios acerca del aprendizaje y la enseñanza de las demostraciones en matemáticas han sido abordados desde diferentes perspectivas, en este estudio se toman cómo apoyo los estudios desarrollados por Hodds y Nehaus & Rach, ambos caracterizados por ser de corte cuantitativo, en donde utilizan el entrenamiento de autoexplicación cómo punto de inflexión.

Hodds (2014) en su disertación realizó tres experimentos, tomando grupos control y grupos experimentales para revisar el impacto del entrenamiento de autoexplicación, encontrando que potencialmente los estudiantes mejoraron a partir de la intervención. Por otra parte, Nehaus & Rach (2019) realizaron pruebas de comprensión y posteriormente desarrollaron diferentes escalas tipo Likert para evaluar las estrategias de lectura utilizadas por parte de los estudiantes. Las estrategias mencionadas son tomadas de los estudios de Schlagmüller & Schneider (2007), Hodds et al. (2014) y Weber (2015).

A partir de lo anterior, se observa la necesidad de incluir una investigación con un componente cualitativo que permita realizar un acercamiento a las experiencias que tienen los estudiantes al aplicar nuevas estrategias, teniendo en cuenta que los estudiantes presentan dificultades en los procesos demostrativos y no se han documentado experiencias que manifiesten la enseñanza de otras estrategias. Por estas razones el estudio está compuesto por dos etapas, la primera etapa se desarrolla bajo un diseño cuantitativo, que consta de cuatro momentos y la segunda etapa con un diseño cualitativo que complementa al último momento de la primera etapa.

3.5.1. Primera etapa: Diseño cuantitativo

3.5.1.1. Primer momento - Prueba diagnóstica

A partir de la recomendación dada por Hodds (2014), es diseñado un primer momento en donde se identifique a los estudiantes con altos y bajos conocimientos mediante una prueba previa al entrenamiento de autoexplicación. Está primera prueba a la que se denomina *prueba diagnóstica,* fue diseñada a partir de las dimensiones descritas en el modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones de Mejía-Ramos et al. (2012) además, permitiera identificar las competencias y conocimientos básicos en lógica y principios sobre los tipos de demostración más utilizados en matemáticas.

La prueba consta de cuatro ítems generales, los cuales buscan identificar en cuáles dimensiones los estudiantes poseen fortalezas y debilidades. Se tomaron en cuenta 6 de las 7 dimensiones porque no todas las pruebas cumplen con todas las dimensiones. A continuación, para cada uno de los ítems se describe cómo se encuentran organizados, el tipo de pregunta realizada, la dimensión correspondiente y su criterio de calificación. Para el desarrollo de esta prueba se dispuso de un tiempo estimado de una hora, en lo que consideramos que es más que suficiente para completarla con comodidad.

El primer ítem es una pregunta de emparejamiento, consiste en relacionar dos columnas bajo el criterio de los tipos de demostración. En la primera columna están los tipos de demostración y en una segunda columna se encuentran sus definiciones, para elaborar las listas se tomaron los conceptos dados por Nelsen & Alsina (2020, p.18). El objetivo es que se asignen las relaciones correctas de cada concepto con su definición, para esta pregunta se cuenta con la relación de cinco elementos. En este ítem se pretende obtener información acerca de la dimensión denominada *significado de los términos y declaraciones*, ya que, se pretende que los estudiantes puedan recordar los diferentes conceptos que potencialmente serviría de apoyo para la continuación de la prueba. Por último, para puntuar está prueba se tuvieron en cuenta la cantidad de relaciones correctas realizadas y el total de relaciones, donde se considerará cómo un punto si tuvo por encima de 3 relaciones correctas

Relaciona cada uno de los tipos de demostración con su respectiva definición.

A. Demostración directa			Se trata de un método para probar que una propiedad de la forma P (n) es cierta para todo entero positivo n. Se comienza mostrando que P (1) se cumple y, acto seguido, que si P (n) es verdad, entonces lo es P (n + 1)
B. Demostración por reducción al absurdo			Se divide la hipótesis en un número finito k de casos, y se hace una demostración del resultado en cada uno de ellos. Las k demostraciones pueden ser directas, por contradicción o de otros tipos.
C. Demostración del contrarrecíproco:			Para probar una implicación del tipo "si A, entonces B", demostrar la implicación lógica equivalente "si no B, entonces no A"
D. Demostración por inducción matemática:			Usa definiciones, axiomas, identidades, desigualdades, lemas y teoremas probados previamente, etc., para mostrar que la conclusión se deduce lógicamente a partir de las hipótesis.
E. Demostración por casos			Muestra que es lógicamente imposible que el resultado sea falso. Se usa habitualmente asumiendo que lo que se quiere probar es falso y llegando a una contradicción

(Nelsen y Alsina, 2020, p.18)

Figura 3. Primera pregunta de la prueba diagnóstica

Una de las dimensiones que se consideran más importantes a identificar en la prueba diagnóstica es que los estudiantes determinen el *Estado lógico de declaraciones y marco de demostración* desde la lectura de la una proposición, un teorema o un ejemplo. Por ello, esta dimensión es trabajada en el segundo, tercer y cuarto ítem; en el segundo y tercero lo abarcan en su totalidad, mientras en el cuarto ítem en su primer sub ítem.

El segundo ítem como es mostrado en la figura 4, consta de tres sub ítems en los que son presentados dos proposiciones y un ejercicio, extraídos del libro de Solow (2013) en donde se busca que los estudiantes identifiquen y señalen la hipótesis y la tesis del enunciado. Para puntuar este ítem se tomaba como aprobado si lograban identificar correctamente en 2 de los tres sub ítems.

Señalar la hipótesis y la tesis de las siguientes proposiciones, definiciones, teoremas, etc.

Proposición: Si m y b son números reales con $m \neq 0$, entonces la función $f(x) = mx + b$ es uno a uno. (Solow, 2013, p. 116)

Ejercicio. Demostrar que, si ABC es un triángulo rectángulo con lados de longitud entera a y b e hipotenusa de longitud entera c, entonces $\frac{1}{2}\ ax^2 + cx + b$ tiene una raíz racional. (Solow, 2013, p. 175)

Proposición: Cualquier número entero $n \geq 2$ puede expresarse como un producto finito de primos. (Solow, 2013, p. 138)

Figura 4. Ítem 2 de la prueba diagnóstica.

El tercer ítem consiste en relacionar tres demostraciones con su respectivo tipo de demostración. Cada uno de ellos fue seleccionado bajo el criterio de que su demostración sea entendida en pocas líneas y que cada una de ellas usará un tipo de demostración diferente. Este ítem es presentado en la figura 5. Para la calificación de este ítem, se aprueba si los estudiantes logran identificar 2 de las tres demostraciones presentadas.

Relacione cada demostración con el tipo de demostración utilizada: **Directa, reducción al absurdo, principio de inducción o por casos**.

Ejercicio: Para todo número entero n ≥ 1, la derivada de x^n es nx^{n-1}. (Solow, 2013, p. 142)	Si $n \epsilon Z$, entonces $n^2 + n + 1$ es impar (Argueta Villamar & Linares Altamirano, s.f.)	**Ejercicio:** Si a y b son enteros y b es impar, entonces ±1 no son raíces de $ax^4 + bx^2 + a$. (Solow, 2013, p. 112)
Demostración: La afirmación es verdadera para $n = 1$, porque, $(x)' = 1x^0$ Suponiendo ahora que $(x^n)' = nx^{n-1}$ entonces para x^{n+1}, $(x^{n+1})' = [(x)(x^n)]'$ $= (x)'.x^n + x.(x^n)'$ $= x^n + x(nx^{n-1})$ $= (n+1)x^n$. La demostración queda completa. (Solow, 2013, p. 142)	$n\ entero \Rightarrow\ n\ par\ o\ n\ impar$ $n\ par\ \Rightarrow n^2\ es\ par\ \Rightarrow$ $n^2 + n\ es\ par$ $\Rightarrow n^2 + n\ + 1\ es\ impar$ $n\ impar\ \Rightarrow n^2\ es\ impar\ \Rightarrow$ $n^2 + n\ es\ par$ $\Rightarrow n^2 + n\ + 1\ es\ impar$ (Argueta Villamar & Linares Altamirano, s.f.)	Suponga, por el contrario, que +1 o −1 es una raíz de $ax^4 + bx^2 + a$. Entonces $a(\pm1)^4 + b(\pm1)^2 + a = 0$; es decir, $b + 2a = 0$. Por lo tanto, $b = -2a$, lo que no puede suceder, por lo que la demostración está completa. (Solow, 2013, p. 142)
Tipo de Demostración:	**Tipo de Demostración**:	**Tipo de Demostración**:

Figura 5. Ítem 3 de la prueba diagnóstica.

Por último, en el cuarto ítem está compuesto por cinco subitems, que corresponden a preguntas abiertas acerca de una proposición y su demostración presentada. El objetivo de este ítem es realizar un primer acercamiento sobre una prueba de comprensión de una demostración. Para puntuar cada subitems se realiza una comparación con respecto a la respuesta esperada, con el fin de calificarlos con 1 punto por una respuesta correcta con sólo pequeños errores (por ejemplo, la falta de declaración de las variables utilizadas en la respuesta) y cero puntos por las respuestas incorrectas. Entre los subitems el primero está relacionado con la dimensión previamente nombrada. En esta pregunta se tiene por propósito que el estudiante identifique cómo se relaciona el estado lógico de las declaraciones y el tipo de demostración que es apropiada para demostrarlo.

Proposición. Si *n* es un número entero positivo, entonces *n* es un número primo **"o"** *n* es un cuadrado **"o"** *n* divide a $(n-1)!$

Demostración. Si $n=1$, luego $n=1^2$ es un cuadrado y la proposición es verdadera. De modo similar si $n=2$, entonces n es primo y de nuevo la proposición es verdadera. Ahora suponga que $n>2$ no es primo ni cuadrado. Si $n>2$ no es primo, hay enteros a y b con $1<a<n$ y $1<b<n$ tal que $n=a.b$. También, porque *n* no es cuadrado,$a\neq b$. Esto significa que a y b son enteros con $2\leq a\neq b\leq n-1$. Es decir, a y b son términos diferentes de $(n-1)(n-2)\cdots 1=(n-1)!$. Por lo tanto, $ab = n\ que\ divide\ (n-1)!$.

a. ¿Qué relación tiene el conector lógico "**o**" en el tipo de demostración utilizada?
b. En la demostración realizan una suposición de que n >2 no es primo ni cuadrado. ¿Por qué es necesaria esta suposición para la demostración?
c. ¿Qué se puede concluir con la demostración presentada?
d. Demuestra con ejemplos cada una de las condiciones presentadas en la proposición.
e. ¿Cómo puede explicar la expresión $2\leq a\neq b\leq n-1$ a partir de las líneas anteriores?

Figura 6. Ítem 4 de la prueba diagnóstica.

A partir del segundo subitem a cada pregunta le corresponde una dimensión diferente. En el segundo subitem se explora la dimensión relacionada con la *identificación de la estructura modular*, dado que en la proposición se utiliza el conector disyuntivo se espera que el estudiante sea capaz de identificar que es necesario revisar los tres casos presentes, y cómo el caso mencionado necesita ser analizado aparte de los otros dos. Con el tercer subitem se abarca la dimensión *ideas de alto nivel*, en donde se busca identificar la capacidad del estudiante de resumir y expresar con sus propias palabras las ideas generales de la demostración.

El cuarto subitem pretende que los estudiantes puedan mostrar a partir de un ejemplo cada caso de la demostración, relacionándose con la dimensión *aplicación a ejemplos.* Cabe mencionar que la pregunta se redactó de modo que el estudiante pueda deducir que se esperaba cómo mínimo un ejemplo de cada uno de los casos, sin necesariamente decir que la demostración es por casos. El último subitem consiste en presentar al estudiante una línea de la demostración e identificar si puede explicar el cómo se deriva de líneas anteriores, esto con el fin de abarcar la dimensión relacionada a la *justificación de las reclamaciones.*

3.5.1.2. Segundo momento - Intervención: *Entrenamiento de autoexplicación*

Para realizar la intervención del entrenamiento de autoexplicación, se elaboró una versión adaptada mediante el software de Google Presentaciones del folleto creado por Hodds et al. (2014). El folleto fue utilizado en un estudio exitoso sobre el entrenamiento de autoexplicación y, por lo tanto, se consideró adecuado para su uso en este estudio.

Para realizar la intervención, se tuvieron en cuenta las recomendaciones dadas por Hodds et al. (2014) en su documento de "Guía para profesores de matemáticas", en donde se especifica que tal folleto se diseñó para apoyar el aprendizaje en matemáticas de pregrado. El folleto es un cuaderno de autoaprendizaje que enseña a los estudiantes a cuestionar su comprensión de cada enunciado de una demostración, a relacionar los enunciados entre sí y con sus conocimientos, y a distinguir las autoexplicaciones de los comentarios de seguimiento y paráfrasis menos eficaces. La exposición de este folleto se llevó a cabo en aproximadamente una hora, realizando un acompañamiento guiado en cada una de sus partes e incentivando la participación y aclaración de dudas o inquietudes que tuvieran los estudiantes.

La presentación consta de seis diapositivas que están diseñadas sobre la plantilla de PowerPoint dada en las piezas de identidad corporativa de la UFPS. En la primera diapositiva se expone el concepto de autoexplicación propuesto por Chi et al. (1989), para que los estudiantes tengan una idea general de lo que se espera de ellos durante la intervención, y puedan asociarlo con conocimientos previos de las teorías de aprendizaje que han sido estudiadas en el programa académico. Está introducción**,** es modificada de la presentada en el folleto original, de esta manera se evita generar un sesgo hacia la favorabilidad de la misma.

En las siguientes diapositivas de la presentación, es presentado el desarrollo del entrenamiento, en donde son expuestas las estrategias y pautas que debe tener un lector de demostraciones matemáticas. A modo general, se muestra la descripción de las preguntas necesarias para realizar autoexplicaciones junto con un ejemplo de la demostración de un teorema junto a las posibles autoexplicaciones en cada línea. Posteriormente, a partir del ejemplo se presentan diferencias entre monitoreo, parafraseo y una autoexplicación, y por último dos teoremas que fueron utilizados para aplicar y poner en práctica lo expuesto en el folleto. El folleto se encuentra en el **Anexo 1.**

3.5.1.3. Tercer momento - *Prueba de comprensión*

Para la selección del material de la prueba, se tuvo en consideración el trabajo realizado por Mejía-Ramos, Lew, de la Torre & Weber (2017), en donde desarrollaron y validaron tres pruebas de comprensión en estudiantes de matemáticas de pregrado, y podían ser solicitadas a sus autores por medio de sus páginas web y correos institucionales. Las tres pruebas fueron facilitadas por uno de sus autores bajo la condición de que fueran utilizadas con fines investigativos y se realizarán las respectivas referencias en el presente estudio.

A partir de las pruebas compartidas por Mejía-Ramos et al. (2017) se realizó una revisión de los temas desarrollados en las demostraciones y sus preguntas de comprensión, con la finalidad de compararlas con los contenidos orientados en las asignaturas del componente disciplinar el programa de Licenciatura en Matemáticas de la UFPS. Concluyendo que la prueba más próxima al contexto es aquella en donde se realiza la demostración del teorema: Todo tercer número de Fibonacci es par. Es decir , f_{3n} $es\ par\ para\ todo\ n\ \in\ N$.

La prueba seleccionada consta de doce preguntas de selección múltiple en donde se les pide que seleccionen la mejor respuesta, extrayéndose ocho de ellas que cumplían con seis de las siete dimensiones presentadas en su modelo. Todas las preguntas están basadas y responden a distintas facetas en la comprensión de la demostración presentada. Además, se diseña una pregunta para completar las siete dimensiones. En la **tabla 3**, son presentadas cada una de las preguntas y su respectiva dimensión.

Tabla 3. Clasificación de las preguntas con su respectiva dimensión

Dimensión	Pregunta
D1: Significado de los términos y declaraciones (Comprensión local)	1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa un número par y un número impar **respectivamente**?
D2: Estado lógico de declaraciones (Comprensión local)	4. ¿Por qué la prueba comenzó mostrando que f_3 era par? Selecciona la mejor opción.
D3: Justificación de las reclamaciones (Comprensión local)	5. ¿Por qué $f_{3(k+1)} = 2 * f_{3k+1} + f_{3k}$? Seleccione la mejor opción.
D4: Ideas de alto nivel (Comprensión holística)	3. ¿Implica el propio teorema que f_8 es un número par, que f_8 es un número impar, o que ninguno de los dos? Seleccione la mejor opción.
D5: Identificación de la estructura modular (Comprensión holística)	6. En la demostración, se supone que f_{3k} es par. ¿Cómo se utiliza esta suposición en la demostración? Selecciona la mejor opción.
D6: Transferir ideas a otro contexto (Comprensión holística)	7. ¿Funcionarían las ideas de la prueba para demostrar que f_{3k} es siempre un número impar, si redefinimos los dos primeros términos para que sean $f_1 = 1$ y $f_2 = 2$? ¿Por qué sí o por qué no? Selecciona la mejor opción. 8. Consideremos los números de Lucas que se definen como sigue: $L_1 = 2$ $L_2 = 1$ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ $para\ todo\ n > 2\ y\ n \in N$ Cómo utilizarías las ideas de la prueba para demostrar que L_{3k+1} es par para todo $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$. Selecciona la mejor opción.

D7: Aplicación a ejemplos (Comprensión holística)	2. ¿Implica el propio teorema que f_8 es un número par, que f_8 es un número impar, o que ninguno de los dos? 9. Suponiendo que f_{12} es par, ¿Cómo utilizarías las ideas de la prueba para demostrar que f_{15} es par? Selecciona la mejor opción.

3.5.1.4. Cuarto momento - *Encuesta de satisfacción*

Acorde a los objetivos y tal como fue mencionado a inicios del presente capítulo, es menester combinar las cualidades de los enfoques cuantitativos y cualitativos con el propósito de solventar las carencias de uno con las fortalezas del otro. Por tal motivo, al precisar un mayor acercamiento de los participantes con sus vivencias y experiencias a la investigación, se diseña el cuarto momento buscando información que permita ser relacionada con la fase cualitativa. Permitiendo de esta forma, comprender el contexto desde su perspectiva al enfrentarse con las teorías utilizadas en este estudio y facilitar una mejor comprensión del fenómeno investigado.

Para concluir la primera etapa se realiza una encuesta de satisfacción con escala Likert, la cual "consiste en un conjunto de ítems presentados en forma de afirmaciones o juicios, ante los cuales se pide la reacción de los participantes" (Hernández-Sampieri, Fernández Collado & Baptista, 2018, p. 238) y es frecuentemente utilizada para medir actitudes acerca de los objetos que son estudiados en una investigación. Las opciones o puntos utilizados fueron: *Muy de acuerdo, De acuerdo, Ni de acuerdo, ni en desacuerdo, En desacuerdo, Muy en desacuerdo*. El instrumento fue entregado a los estudiantes una semana posterior al tercer momento y el tiempo de aplicación estimado fue de una hora.

La encuesta está dividida en tres apartados, el primer apartado se titula *Entrenamiento de autoexplicación,* compuesto de siete preguntas que pretenden realizar un acercamiento sobre su entendimiento, presentación, material de apoyo y aplicabilidad en su desarrollo académico. El segundo apartado denominado *Modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones* está constituido por cuatro preguntas relacionadas con la comprensión y evaluación de las demostraciones, sumado a la relación con el entrenamiento de autoexplicación. El último apartado nombrado *Intervención* tiene siete preguntas las cuales tienen por objetivo valorar el diseño y ejecución de la intervención realizada.

Para la puntuación del instrumento, se tiene en cuenta que la mayoría de preguntas fueron diseñadas con una dirección positiva a excepción de una negativa en el segundo apartado, todas se puntúan en una escala de uno a cinco, en donde uno corresponde al mínimo valor de favorabilidad llamado muy en desacuerdo y cinco al máximo grado de favorabilidad llamado muy de acuerdo. Cómo la encuesta se encuentra divida en tres apartados, el primero y el último apartado tienen una puntuación mínima de siete y una puntuación máxima de treinta y cinco, por otra parte, el segundo apartado al sólo poseer 4 preguntas tiene una puntuación mínima de cuatro y una puntuación máxima de veinte. A cada estudiante se le entrega en una página, se explica el objetivo de la encuesta y son expuestas las indicaciones para completarla. La encuesta de satisfacción la encuentra en el **Anexo 3**

3.5.2. Segunda etapa: Diseño Cualitativo

Conforme fue descrito durante la metodología, el diseño cualitativo busca complementar la fase cuantitativa para incorporar ambos métodos y buscar explorar las vivencias de los participantes. Para llevar a cabalidad nuestro propósito el instrumento que mejor se adecúa es la entrevista porque nos proporciona respuestas en el lenguaje y perspectiva del entrevistado. El tipo de entrevista seleccionado es de carácter semiestructurado, las cuales "se basan en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información" (Hernández-Sampieri et al. p. 403).

De forma análoga a la encuesta de satisfacción, la entrevista es diseñada en tres apartados, que indagan sobre las experiencias vividas por los estudiantes *antes*, *durante y después* del entrenamiento de autoexplicación, cuyo propósito es profundizar la relación que tuvieron con los momentos del desarrollo cuantitativo. Para obtener diferentes puntos de vista, se seleccionaron dos estudiantes a partir de las consideraciones dadas en el diseño de la *Prueba diagnóstica* y que manifestaron un cambio en su comprensión posterior al entrenamiento de autoexplicación, reflejados en los resultados de la *Prueba de comprensión*.

El primer apartado denominado *Antes del entrenamiento de autoexplicación* consta de tres preguntas, pretendiendo realizar un acercamiento sobre las formas en cómo realizaban el estudio de las demostraciones matemáticas antes de tener la intervención con el entrenamiento. El segundo apartado titulado *Durante el entrenamiento de autoexplicación* compuesto de tres preguntas, en las cuales se les pide que comenten sobre sus impresiones y recomendaciones acerca de la intervención. El último apartado nombrado *Después del entrenamiento de autoexplicación,* compuesto por seis preguntas, se solicita a los entrevistados que expresen sus impresiones sobre las teorías utilizadas en el estudio, su aplicabilidad y su potencial en el desarrollo del programa académico.

4. Resultados Y Hallazgos

En este capítulo, se informa sobre el análisis y resultados sobre la etapa cuantitativa y cualitativa, en el que se comparó el efecto del entrenamiento de autoexplicación en la comprensión de las demostraciones de estudiantes universitarios que cursaron la asignatura de Seminario Investigativo III, todos ellos previamente habían aprobado las asignaturas que hacen parte del eje disciplinar del programa de Licenciatura en Matemáticas. La investigación fue realizada durante el horario de la asignatura, tomándose una hora por tiempo de aplicación en cada sesión. En total se realizaron cuatro sesiones, una por semana de forma consecutiva y para el desarrollo de esta fase de análisis solo se tuvieron en cuenta aquellos estudiantes que participaron en todas las sesiones, siendo 9 los docentes en formación que cumplen con estas características.

4.1. Análisis De La Etapa Cuantitativa

Para el análisis de la etapa cuantitativa serán descritos sus resultados en dos formas, desde un enfoque descriptivo e inferencial. El descriptivo caracteriza la muestra en función de las variables predictoras a diferencia del inferencial, en donde se pretende determinar la existencia de la correlación entre los resultados de las pruebas realizadas sobre la muestra. En el primer enfoque se presentan los resultados de la prueba diagnóstica, prueba de comprensión y la encuesta de satisfacción, por otra parte, en el segundo enfoque se presentan los resultados de correlación entre la prueba diagnóstica y la de comprensión.

4.1.1. Enfoque descriptivo

4.1.1.1. Prueba diagnóstica

Con el propósito de conocer los conocimientos previos de los estudiantes y tener un primer acercamiento de sus respuestas frente a las preguntas que están relacionadas con la comprensión de las demostraciones, se asignó la calificación a los estudiantes en cada prueba considerando el siguiente criterio: cada subitem aporta 1 punto, para un total de 16 puntos, su resultado es convertido a la escala de 0 a 5, la cual se encuentra estipulada en el estatuto estudiantil de la UFPS, en donde cero es la calificación mínima y cinco puntos es la calificación máxima en la prueba. A continuación, se presenta el análisis estadístico asociado a este proceso. En concordancia con el carácter formativo de la evaluación, se presenta en la tabla 4 los niveles de desempeño para representar a nivel cualitativo las potenciales habilidades que poseen los estudiantes en torno a la comprensión de las demostraciones.

Tabla 4. Niveles de desempeño en la prueba diagnóstica

Niveles	Definición	
Superior	El estudiante ha demostrado dominio en los conocimientos, habilidades y actitudes requeridas con un alto grado de efectividad en la comprensión de las demostraciones, alcanzando a dominar seis dimensiones del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	13 - 16
Alto	El estudiante ha demostrado los conocimientos, habilidades y actitudes efectivos en la comprensión de las demostraciones, alcanzando a dominar entre cuatro y cinco dimensiones del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	9 - 12
Medio	El estudiante demuestra poseer conceptos básicos en conocimientos, habilidades y actitudes en la comprensión de las demostraciones, alcanzando a dominar entre dos y tres dimensiones del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	5 - 8
Bajo	El estudiante presenta vacíos conceptuales, trayendo cómo consecuencia que alcance a lo mucho el desarrollo de una dimensión del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	0 - 4

Teniendo en cuenta los niveles de desempeño, en la figura 7 son presentados los resultados, en donde se encontró que el 55,6% de los estudiantes, es decir, 5 de ellos poseen un nivel bajo, mientras un 22,2% o 2 estudiantes se encuentran en nivel medio y el porcentaje restante, es decir 2 estudiantes en un nivel alto.

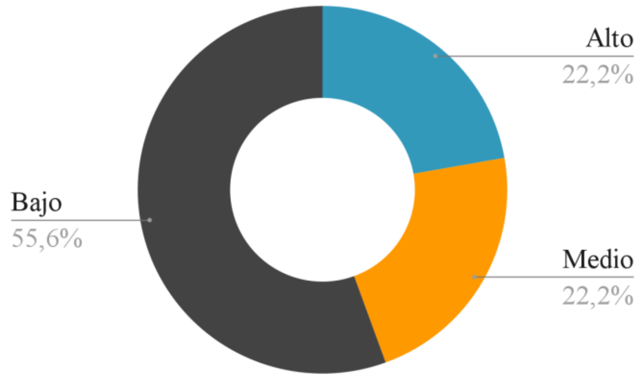


Figura 7. Niveles de desempeño de los estudiantes en la prueba diagnóstica.

Además, es importante resaltar en cuáles de las dimensiones la muestra presenta fortalezas y debilidades en las dimensiones de comprensión de la demostración, tomándose cómo una fortaleza aquella donde más del 50% de los estudiantes puntuaron positivamente los ítems relacionados con dicha dimensión. En la figura 8 se observa que poseen potencialidades solo en la D5, es decir, la identificación de la estructura modular, en donde se espera que los estudiantes puedan dividir en componentes o módulos una demostración o especifiquen la relación lógica entre cada uno de ellos. Considerándose que en las demás dimensiones son tomadas como debilidades.

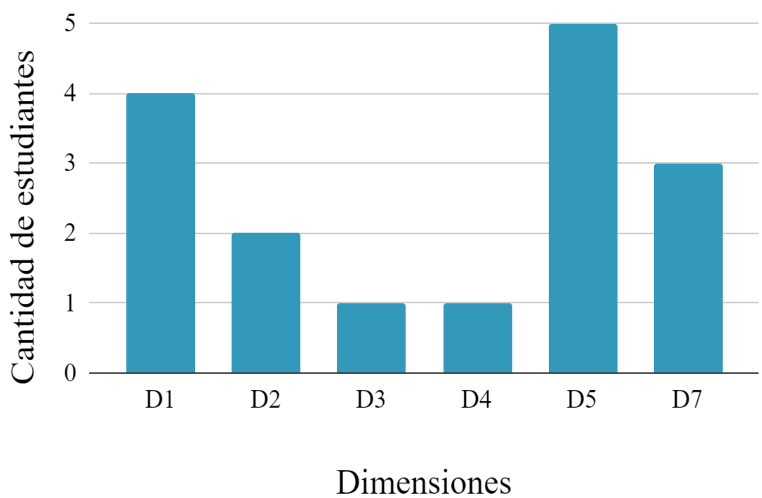


Figura 8. Cantidad de estudiantes por dimensión alcanzada en la prueba diagnóstica.

4.1.1.2. Prueba de comprensión

Posterior a la intervención del entrenamiento de autoexplicación, se les aplica la prueba de comprensión a partir de una demostración de los números de Fibonacci, la cual consta de nueve preguntas que evalúan las dimensiones de la comprensión de la misma. De forma análoga a la prueba diagnóstica, a cada pregunta se le asignó un punto si es correcta, para un máximo de nueve puntos. También, la proporción de su calificación es adaptada al sistema de evaluación de la UFPS, teniendo como mínimo una calificación de cero y máximo de cinco. Por último, se adapta la tabla 4 a la cantidad de preguntas y las dimensiones abarcadas en la la prueba, tal como son presentadas en la tabla 5.

Tabla 5. Niveles de desempeño en la prueba de comprensión

Niveles	Definición	
Superior	El estudiante ha demostrado dominio en los conocimientos, habilidades y actitudes requeridas con un alto grado de efectividad en la comprensión de las demostraciones, alcanzando a dominar siete dimensiones del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	9
Alto	El estudiante ha demostrado los conocimientos, habilidades y actitudes efectivos en la comprensión de las demostraciones, alcanzando a dominar entre cinco y seis dimensiones del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	6 - 8
Medio	El estudiante demuestra poseer conceptos básicos en conocimientos, habilidades y actitudes en la comprensión de las demostraciones, alcanzando a dominar entre tres y cuatro dimensiones del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	3 - 5
Bajo	El estudiante presenta vacíos conceptuales, trayendo cómo consecuencia que alcance a lo mucho el desarrollo de dos dimensiones del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012)	0 - 2

Como se demuestra en la figura 9, los niveles de desempeño alcanzados por los estudiantes en la prueba de comprensión, son de un 66,7% o 6 estudiantes con un nivel medio y 3 de ellos que representan un 33,33% logrando un nivel alto.

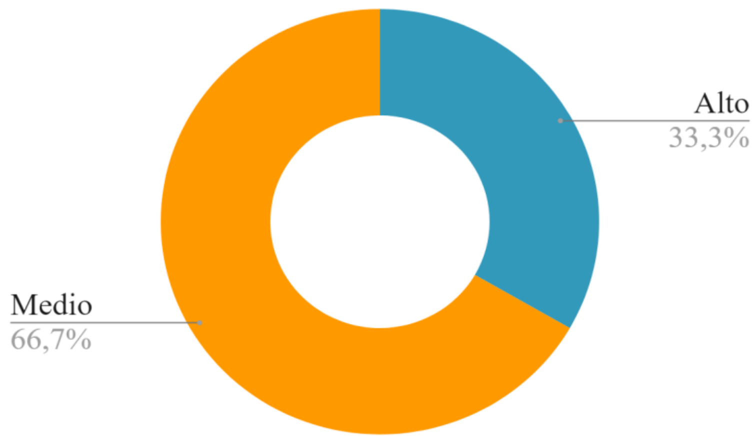


Figura 9. Niveles de desempeño de los estudiantes en la prueba de comprensión.

En cuanto a las dimensiones, en la figura 10 se puede observar que destacan como fortalezas las dimensiones D1, D3, D5, D6, D7, ya que, más del 50% de los estudiantes respondieron positivamente al menos una pregunta relacionada con ellas en los casos de dimensiones que poseían dos preguntas. Destacando que D5 se mantuvo como fortaleza en ambas pruebas. Solo la tercera parte de los estudiantes respondieron positivamente a las dimensiones D2 y D4, considerándolas como debilidades que posee la gran mayoría de la muestra.

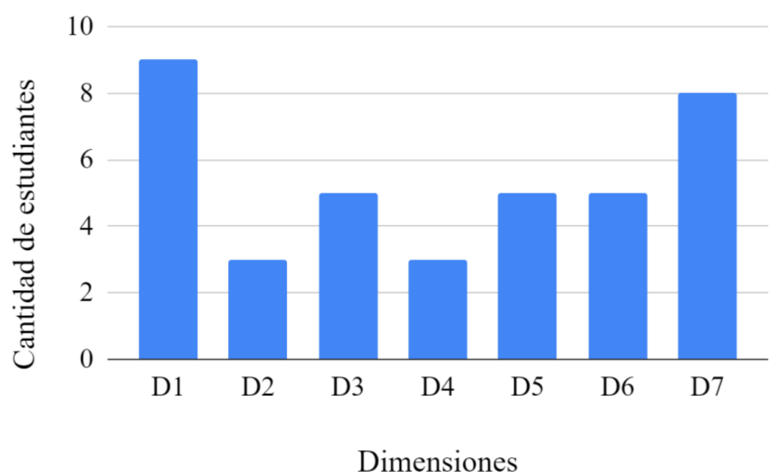


Figura 10. Cantidad de estudiantes por dimensión alcanzada en la prueba de comprensión.

4.1.1.3. Encuesta de satisfacción

Para evaluar el test de actitudes y de conocimientos mediante la construcción de una escala ordinal de Likert, se solicitó a los estudiantes que evaluaran los ítems con valores de 1 como totalmente en desacuerdo (TD), 2 en desacuerdo (ED), 3 ni en desacuerdo ni de acuerdo (NI), 4 de acuerdo (DA) y 5 como totalmente de acuerdo (TA). Los resultados serán presentados las valoraciones para cada apartado cómo fue diseñado.

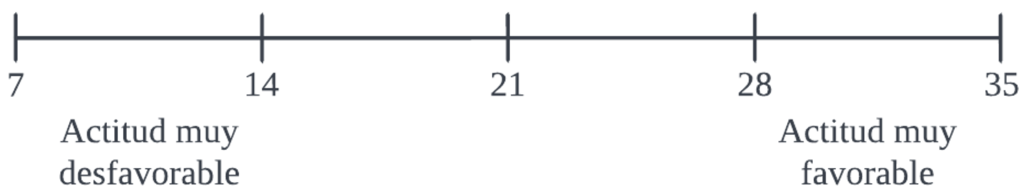


Figura 11. Puntuación de la escala de actitudes del entrenamiento de autoexplicación y la intervención

En la figura 11 se presenta una escala que expone la puntuación total de los apartados del *entrenamiento de autoexplicación* e *intervención*, ambos con siete ítems y considerando un puntaje mínimo de 7 y máximo de 35 para cada una de ellas, representando así la valoración general de cada estudiante sobre cada apartado. Para el entrenamiento de autoexplicación, 5 estudiantes puntuaron entre 28 y 35 considerándola con una actitud muy favorable y los 4 restantes puntúan entre 21 y 28 considerándolo como favorable. En el apartado de intervención, 6 estudiantes dieron puntuaciones entre 28 y 35 dando una valoración con actitud muy favorable y 3 de ellos puntuaron entre 21 y 28 considerándola como favorable.

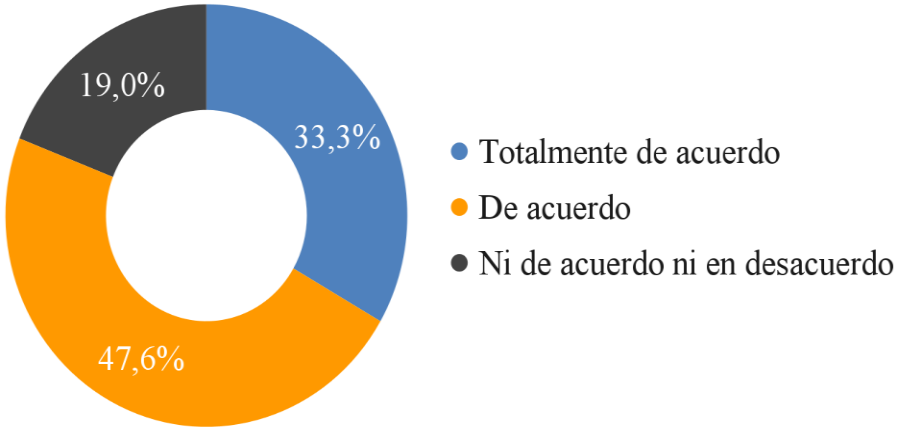


Figura 12. Niveles de satisfacción en relación al entrenamiento de autoexplicación

El primer apartado valora la fase del entrenamiento de autoexplicación, tal como es mostrada en la figura 12. Fue valorada de forma general en su mayoría como DA con un 47,6% y TA con un 33,3%. Cuando en la encuesta se les propuso si recomendarían o usarían el entrenamiento de autoexplicación para estudios de postgrado - ítems 1 y 2 - todos ellos aseguraron estar DA o TA; también cabe destacar que 8 de 9 están TA en considerar importante que sean enseñadas estrategias para mejorar la comprensión de las demostraciones. Por otra parte, la pregunta 4 expresa si consideran que el entrenamiento podría convertirse en un distractor para comprender demostraciones 5 de ellos estuvieron en NI y 4 de ellos estuvieron en acuerdo o totalmente de acuerdo.

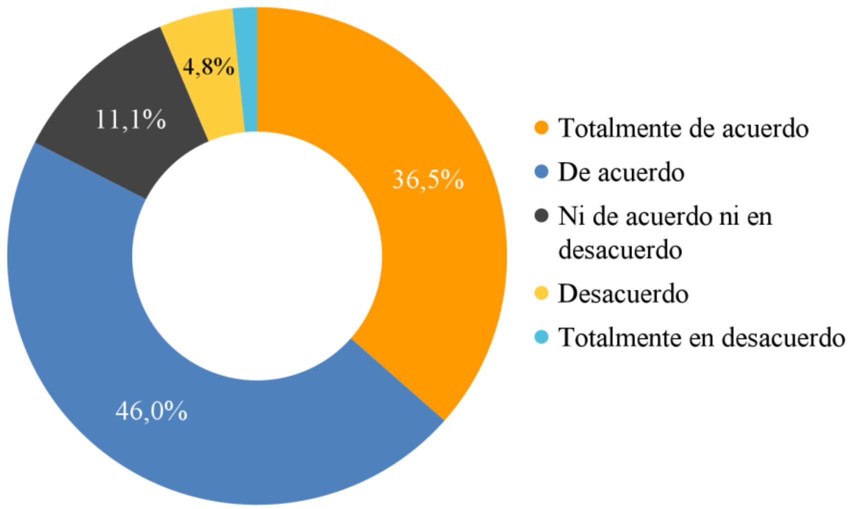


Figura 13. Niveles de satisfacción en relación a la intervención

En la figura 13, se observan los resultados del apartado de intervención, en donde un 46% de los estudiantes afirma estar DA con el desarrollo de la intervención, mientras un 36,5% puntuaron las afirmaciones como TA. Un 11% de los estudiantes valoran como NI y solo un 6,4% valoraron estar ED o TD. Las preguntas 5, 6 y 7 evalúan las intervenciones dadas por los expositores en aspectos como dar la información clara, despertar interés en el tema y fomentar espacios para aclarar dudas; la totalidad de los estudiantes valoraron estas preguntas con DA o TA. puntuaciones en cuanto al diseño todos ellos afirman estar DA o TA. Por último, las afirmaciones 1 y 4, buscan valorar las actitudes que tuvieron sobre la cantidad de sesiones y si podrían aprender el entrenamiento de forma autónoma, en donde 3 de ellos valoran con ED y otros 3 con NI sobre si una sesión en suficiente, en cuanto aprendizaje autónomo, 7 de ellos afirma estar DA y solo 2 en NI.

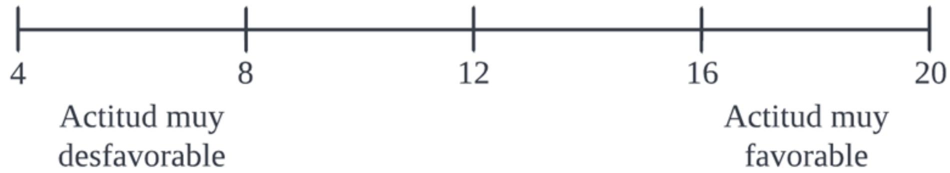


Figura 14. Puntuación de la escala de actitudes del modelo de evaluación.

En la figura 14 se presenta la escala que expone la puntuación total de las 4 preguntas para el apartado del *modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones*. Al poseer sólo 4 ítems, su puntuación va desde un puntaje mínimo de 4 y un máximo de 20. La primera pregunta se diseñó con afirmación negativa, su puntuación se realiza de forma inversa. En este apartado, 5 estudiantes valoran con puntuaciones entre 16 y 20 como muy favorables sus actitudes, 3 de ellos con puntuaciones entre 12 y 16 valorándolo como favorable y 1 de ellos con una actitud desfavorable hacia el modelo.

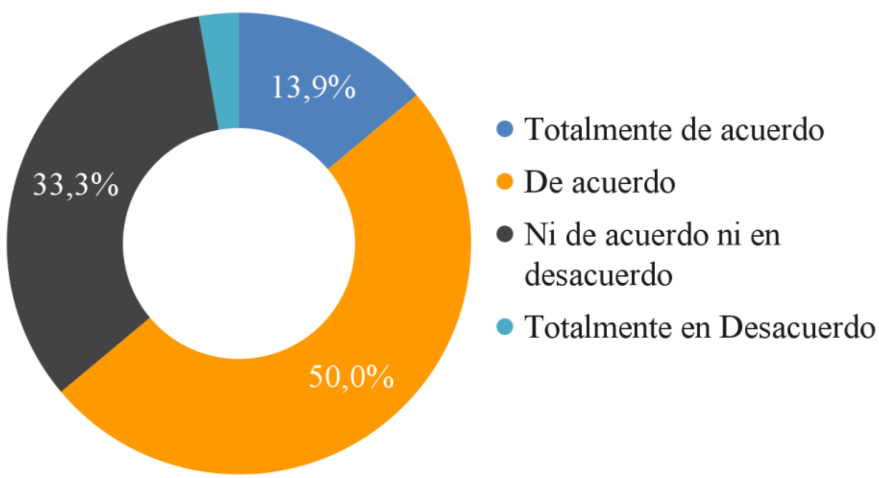


Figura 15. Niveles de satisfacción en relación al modelo de evaluación

En la figura 15, son presentados las proporciones de las respuestas de los estudiantes acerca del apartado sobre el modelo de evaluación, en donde el 50% puntuaron DA y 13,9% con TA con el uso del modelo, el 33% valoraron con NI y solo el 2,8% hizo puntuaciones de TD. La primera pregunta hace referencia a si las pruebas de comprensión requieren mayor dificultad que realizar demostraciones, 5 de ellos lo valoraron como ED, sin embargo 4 de ellos tuvieron una actitud NI. la cuarta pregunta que hace referencia al tiempo de análisis de pruebas de comprensión, 4 de ellos sienten que NI, 3 de ellos están DA y 2 afirman estar TA. La tercera pregunta busca resaltar si había sido evaluada su comprensión durante el transcurso del programa académico y 2 de ellos presentan opiniones opuestas al valorar con TD Y TA, 3 de ellos en NI y 4 de ellos afirma estar DA. Por último, la segunda pregunta valora la relación que los estudiantes encuentran entre el entrenamiento y la prueba de comprensión, en donde 2 de ellos estuvo TA, 6 valoraron con DA y solo uno con NI.

4.1.2. Enfoque inferencial

Para determinar los cambios en la comprensión de las demostraciones antes y después del entrenamiento de autoexplicación, se realiza una verificación estadística comparando las medias de los resultados de la prueba diagnóstica y la prueba de comprensión presentada por los estudiantes que conformaron la muestra, a cada una de las pruebas se le asignó una calificación de 5 puntos en total que se distribuyeron de manera proporcional en el número de preguntas, 16 y 9 respectivamente. A continuación, se presenta el análisis estadístico asociado a este proceso.

4.1.2.1. Validación del sistema de hipótesis

Determinar el impacto de las estrategias del entrenamiento de autoexplicación en la comprensión de las demostraciones matemáticas.

A partir de lo planteado en el tercer objetivo específico, que apunta a la última etapa de la cuantitativa, en donde se pretende validar el siguiente sistema de hipótesis

Hipótesis nula	H_0	Al ejecutar el entrenamiento de autoexplicación se mantienen igual o desmejoran los resultados de la prueba de comprensión con respecto a la prueba diagnóstica con los estudiantes que

		cursan Seminario Investigativo III del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UFPS O lo que es equivalente a decir que… $diferencia_{promedio}(P.Comprensión - P.Diagnóstica) \leq 0$
Hipótesis alternativa	H_a	Al ejecutar el entrenamiento de autoexplicación se evidencian mejoras de los resultados en la prueba de comprensión con respecto a la prueba diagnóstica, con los estudiantes de Seminario Investigativo III del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UFPS O lo que es equivalente a decir que… $diferencia_{promedio}(P.Comprensión - P.Diagnóstica) > 0$

Con la intención de obtener datos que evidencian lo propuesto se realizó el proceso de validación del sistema de hipótesis bajo la técnica de diferencia de medias para muestras pareadas dado que se realizan dos mediciones sobre la misma muestra en dos lapsos de tiempo diferentes. Los datos utilizados para realizar el análisis estadístico fueron las calificaciones obtenidas por cada estudiante en el primer y segundo instrumento. Estos datos han sido organizados y procesados para obtener un resultado que representa la aprobación o desaprobación de la hipótesis nula

Tabla 6. Resultados de la prueba diagnóstica y la prueba de comprensión

Estudiante	Prueba Diagnóstica	Prueba de Comprensión	Diferencia $P.Comprensión$ $P.Diagnóstica$	$Diferencia^2$
1	0,63	2,22	1,60	2,55
2	0,94	3,33	2,40	5,74
3	3,44	2,22	-1,22	1,48
4	2,81	4,44	1,63	2,66
5	1,56	1,67	0,10	0,01
6	0,94	1,67	0,73	0,53
7	1,25	2,22	0,97	0,95

8	0,94	3,33	2,40	5,74
9	2,50	2,78	0,28	0,08

La mejor forma de analizar los datos es mediante la distribución t - student, el cual se diseñó para examinar las diferencias entre dos muestras independientes y pequeñas que tengan distribución normal y homogeneidad en sus varianzas (Sánchez Turcios, 2015). Por lo tanto, nos permite comparar las medias de muestras que para nuestro caso son de 9 estudiantes. La metodología para realizar sus cálculos según el libro de estadística y muestreo (Martínez, 2012) es la siguiente:

Primero se calcula el promedio de las diferencias

$$n = 9$$

$$dif_{promedio} = \frac{\Sigma dif}{n} = \frac{8{,}89}{9} = 0{,}99$$

Luego, es calculada la desviación estándar de las diferencias

$$S_{dif} = \sqrt{\frac{\Sigma dif^2 - n\left(dif_{prom}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{19{,}74 - 9\left(0{,}99\right)^2}{9-1}}$$

$$S_{dif} = 1{,}17$$

Posterior, se calcula el estadístico de prueba

$$t = \frac{dif_{prom}}{\frac{S_{dif}}{\sqrt{n}}} = \frac{\left(dif_{prom}\right)\sqrt{n}}{S_{dif}}$$

$$t_{calculado} = \frac{(0{,}99)\sqrt{9}}{1{,}17} = 2{,}53$$

El valor del estadístico de prueba calculado es de 2.53, el nivel de confianza recomendado es del 95%, entonces se trabaja con un nivel de significancia $\alpha = 5\% = 0{,}05$. La prueba de hipótesis utilizada es de cola derecha, y el estadístico de prueba es tomado de la tabla T - Student asociando el grado de libertad, que es calculado cómo el tamaño de la muestra n-1, es decir un valor crítico de 1,86.

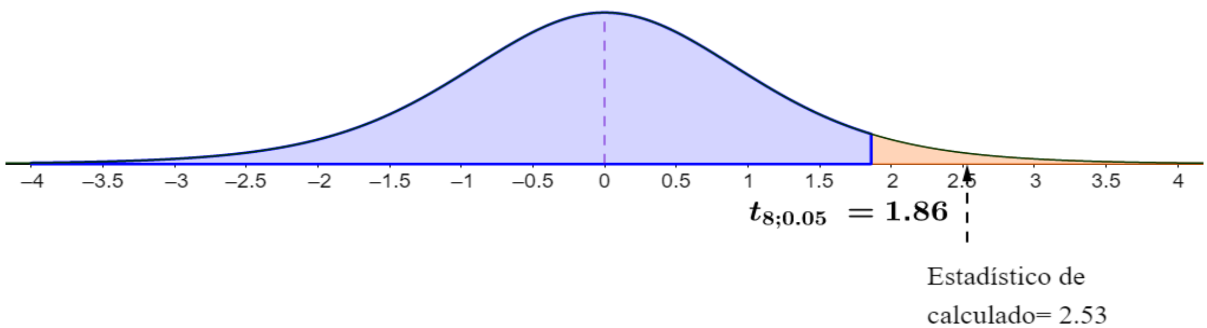


Figura 16. Contraste entre el estadístico de prueba y el estadístico calculado con distribución t-student

La construcción de la Figura 16 se realizó a partir del recurso creado y publicado por Betancort Álvarez & Arnaldos (s.f.) en el sitio web de GeoGebra. A partir de los resultados se puede observar que el estadístico calculado (2,53) es mayor que el estadístico de prueba (1,86) tomado a partir de los grados de libertad y nivel de confianza, en donde se evidencia que el estadístico calculado cae fuera de la zona de aceptación de la hipótesis nula, concluyendo la aceptación de la hipótesis alternativa. En otras palabras, se acepta que hay evidencias suficientes para considerar que el entrenamiento de autoexplicación tuvo impacto en la comprensión de las demostraciones al presentar mejoras del resultado en la prueba de comprensión con respecto a la prueba diagnóstica.

4.2. Análisis De La Etapa Cualitativa

Para el análisis de los datos recolectados a partir de las entrevistas semiestructuradas se utiliza cómo esquema el análisis de contenidos. Es conceptualizado cómo:

> The objective in qualitative content analysis is to systematically transform a large amount of text into a highly organized and concise summary of key results. Analysis of the raw data from verbatim transcribed interviews to form categories or themes is a process of further abstraction of data at each step of the analysis; from the manifest and literal content to latent meanings. [El objetivo en el análisis de contenido cualitativo es transformar sistemáticamente una gran cantidad de texto en un resumen muy organizado y conciso de los resultados claves. El análisis de los datos brutos de las entrevistas transcritas literalmente para formar categorías o temas, es un proceso de mayor abstracción de los datos en cada paso del análisis; desde el contenido explícito y literal hasta los significados implícitos] (Erlingsson & Brysiewicz, 2017, p. 94)

Al igual que lo expresa Dawson (2009) el análisis de contenido es un trabajo sistemático en cada transcripción asignando códigos, que pueden ser números o palabras, a características específicas del texto, conllevando que sea un mecánico y se realice posterior a la recogida de los datos (p.122). Para llevarlo a cabo, se utilizaron de base los conceptos Erlingsson & Brysiewicz (2017) presentados en la tabla 7.

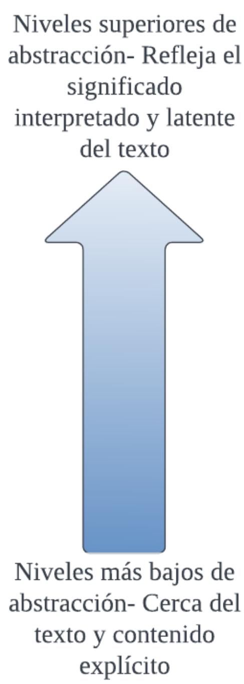
Tabla 7. Términos utilizados para el análisis de contenidos

Término	Concepto
Condensación	La condensación es un proceso de acortar el texto mientras se preserva el significado central.
Código	Se puede pensar en un código como una etiqueta; un nombre que describe más exactamente de qué se trata esta unidad particular de significado condensado. Por lo general, una o dos palabras de largo
Categoría	Una categoría se forma agrupando aquellos códigos que se relacionan entre sí por su contenido o contexto. En otras palabras, los códigos se organizan en una categoría cuando describen diferentes aspectos, similitudes o diferencias, del contenido del texto que pertenecen juntos. Los nombres de las categorías son concretos y cortos.
Tema	Se puede considerar que un tema expresa un significado que se oculta, es

	decir, un contenido implícito, que se encuentra en dos o más categorías. Los nombres de los temas son muy descriptivos e incluyen verbos, adverbios y adjetivos.

Nota: Adaptado de *A hands-on guide to doing content analysis* (p.94) , por Erlingsson y Brysiewicz, 2017, African Journal of Emergency Medicine, 7(1), 93-99.

Después de haber sido transcritas las entrevistas, se realizó la codificación del texto, extrayéndose inicialmente las unidades de análisis para cada una de las entrevistas, posteriormente realizándose su respectiva condensación, para luego asignarles un código, que son relacionados entre sí para resumirlos en una categoría, en donde se desprende el tema.



Tema	El entrenamiento de autoexplicación a partir de la experiencia de los estudiantes
Categoría	Antes del entrenamiento de autoexplicación
Código	Aprendizaje Deductivo
Unidad de análisis condensada	Comprendia haciendo ejercicios repetidamente hasta hacer generalizaciones
Unidad de análisis	Pues, las primeras que eran demostración, eran como más fáciles entre comillas, Las entendía, era haciendo ejercicios y de tanto hacer entonces como que generalizaba procesos y comprendía lo que hacía

Figura 17. Ejemplo del análisis realizado para obtener mayores niveles de abstracción**.** Nota: Adaptado de *A hands-on guide to doing content analysis* (p.94) , por Erlingsson y Brysiewicz, 2017, African Journal of Emergency Medicine, 7(1), 93-99.

En total se realizaron dos entrevistas, a las cuales se les realizó el proceso mencionado previamente, cuyo análisis de resultados arrojaron tres categorías que proporcionan información acerca de las experiencias vividas por los estudiantes en relación con el entrenamiento. Para la descripción de cada una de ellas se toman los códigos extraídos de ambas entrevistas, en donde la gran mayoría coinciden. Las categorías que surgen del análisis se denominaron: *antes del entrenamiento de autoexplicación, durante el entrenamiento de autoexplicación* y *después del entrenamiento de autoexplicación,* cabe resaltar que a cada unidad de análisis se le una etiqueta alfanumérica compuesta de dos partes, la primera parte indica el número dado al entrevistado y la segunda la categoría de la cual pertenece. Por ejemplo, E1D4, E1 significa entrevistado 1 y D4 referencia la unidad de análisis perteneciente a la categoría de *después del entrenamiento de autoexplicación,* para las otras categorías se les asignaron las letras A y E respectivamente. A continuación, se presentan las abstracciones realizadas en cada una.

4.2.1. Antes del entrenamiento de autoexplicación

En la primera categoría fueron extraídos los códigos: *aprendizaje memorístico, aprendizaje inductivo, lectura intensiva, estrategias para la enseñanza de las matemáticas (didáctica), desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones y dificultad en la comprensión de las demostraciones*. En esta categoría, se busca conocer las estrategias o métodos de estudios aplicados por los estudiantes antes de ser aplicada la intervención del entrenamiento de autoexplicación.

Tabla 8. Códigos que conforman la categoría: Antes del entrenamiento de autoexplicación

<table>
<tr><th></th><th>Entrevistado 1</th><th>Entrevistado 2</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Códigos</td><td colspan="2">Desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aprendizaje memorístico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dificultad en la comprensión de las demostraciones</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje inductivo</td><td rowspan="2">Estrategias para la enseñanza de las matemáticas</td></tr>
<tr><td>Lectura intensiva</td></tr>
</table>

En la tabla 8 se presentan los códigos de los dos entrevistados, ambos estudiantes expresan que presentaban *desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones*, manifestándose en los siguientes fragmentos extraídos en la entrevista

> "No, la verdad no sabía que existían estrategias para demostración" (E1A3)

> "... pero no, aparte de las estrategias de conocimiento de demostración o comprensión del punto de demostración de materias digamos como la teoría de números o álgebra abstracta, no está como ese proceso de metodología o estrategia que pueda ayudarlo a uno a mejorar el proceso de aprendizaje." (E2A5)

Además, se les preguntó sobre sus estrategias de estudio para las asignaturas del eje disciplinar que implican las actividades demostrativas y las estrategias utilizadas para la comprensión de la prueba diagnóstica, ambos entrevistados describieron que utilizaron el *aprendizaje memorístico*, para aprobar las asignaturas puesto que requerían una mayor comprensión. El entrevistado 1 menciona que:

> "... ya para las materias difíciles como topología y eso me aprendía las cosas de memoria porque realmente no entendía las demostraciones... pero ya a lo último si era memoria porque se me dificultaba" (E1A2)

De manera similar a lo que comentaba el entrevistado 2, menciona lo anterior, añadiendo que por el uso del aprendizaje memorístico en ocasiones no logra recordar los conceptos sobre los que se están preguntando.

> ".... a veces trato de hacerlas un poquito memorísticas, aprender el paso a paso que se debe seguir, la estructura que se tiene, aprender lo que son las leyes y todo lo que implican las demostraciones" (E2A2)

> "...al momento de realizar una prueba diagnóstica sobre si uno recuerda o no recuerda algo o se acuerda de lo que aprendió, comprendió durante el proceso de aprendizaje, entonces uno queda como que ¡Uy!, ahora que digo, entonces más que todo eso el recordar lo que uno conoce" (E2A9)

El último código en común para ambos entrevistados es la que se encuentra relacionada con la *dificultad en la comprensión de las demostraciones*, presentes en cualquier proceso de aprendizaje, sin embargo, los estudiantes expresaron su aparición en diferentes momentos de su curso en el programa académico. Para el entrevistado 2, las dificultades estuvieron presentes desde las primeras asignaturas, a diferencia de la experiencia del entrevistado 1, quien comentaba que su dificultad en asignaturas como topología. En el último fragmento de entrevista se observa que el entrevistado 2, alude su dificultad a la falta de comprensión de las demostraciones.

> "... ya para las materias difíciles como topología y eso me aprendía las cosas de memoria porque realmente no entendía las demostraciones... pero ya a lo último si era memoria porque se me dificultaba" (E1A2).
>
> "Bueno, pues en primera parte para el estudio, ya que, pues las demostraciones siempre se me han complicado, a veces trato de hacerlas un poquito memorísticas" (E2A1).
>
> "... al no tener como la comprensión de esos temas en sí de demostración, por la dificultad que uno puede tener al momento de aprenderlas" (E2A4).

En el caso del entrevistado 1 se encuentran dos códigos extras a los comunes, los cuales tienen que ver a las estrategias que utilizó para responder las preguntas de la prueba diagnóstica y las utilizadas en algunas de las asignaturas que cursó en el programa académico. El estudiante comentó que para esta prueba leía los enunciados de manera lenta, fijándose en cada uno de los conceptos para así poder analizarlos mejor. A esté código se le denominó *lectura intensiva*, porque es definida cómo la lectura detallada de textos con los dos objetivos de comprender el texto y aprender las características del lenguaje a través de un enfoque deliberado en estos elementos (Nation, 2004, cómo se citó en Blanco Sarmiento, 2014), muy similar al proceso descrito por el entrevistado 1 al leer las preguntas de la prueba.

> "Básicamente, uno pues como decir, como tomarme el tiempo y analizar las cosas que iba haciendo, ósea que hice esto, como lo puedo analizar, o como lo entiendo y al momento que siento que era un poco como más lento me daba como esa seguridad de que las cosas como que iban bien, por decirlo así." (E1A5)

Por otra parte, comentó que la estrategia que utilizó el estudiante para el curso de las asignaturas se centró en realizar varios ejercicios hasta comprender los pasos que realizaban, para así encontrar las características que le permiten encontrar su generalización, titulando este código como aprendizaje *inductivo,* puesto que parte de la interpretación de las demostraciones para integrarlas en las siguientes que se encuentre.

> "Pues, las primeras que eran demostración, eran como más fáciles entre comillas, Las entendía, era haciendo ejercicios y de tanto hacer entonces como que generalizaba procesos y comprendía lo que hacía" (E1A1)

A diferencia del entrevistado 1, el entrevistado 2 menciona que trató de implementar las estrategias que había aprendido con las asignaturas orientadas a las didácticas de los pensamientos matemáticos, sin embargo, no fueron adecuadas por comentar que aún presenta dificultades en cuanto a los procesos demostrativos. Por lo anterior el código asignado es: *estrategias para la enseñanza de las matemáticas*, mostrado en la siguiente unidad de análisis:

> "… porque en realidad porque las estrategias que uno conoce son más que todo digamos de didácticas" (E2A6).

4.2.2. Durante el entrenamiento de autoexplicación

Para la segunda categoría, fueron hallados los siguientes códigos: *desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones y recomendaciones de aplicación*. En esta categoría, se les pide que comenten sobre sus impresiones y recomendaciones acerca de la intervención.

Tabla 9. Códigos que conforman la categoría: Durante el entrenamiento de autoexplicación

	Entrevistado 1	Entrevistado 2
Códigos	Desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones	
	Recomendaciones de intervención	

En la tabla 9, se encuentra que, al extraer la información de las unidades de análisis, ambos entrevistados reafirman un *desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones,* cuando se les preguntó si conocían alguna de las estrategias del entrenamiento de autoexplicación, los entrevistados expresaron:

> "Como decía anteriormente, no tenía conocimiento de que existían estrategias para las demostraciones, pues al ser esta una estrategia no tenía conocimiento absolutamente de nada" (E1E1)
>
> "...era la primera vez que escuchaba de la estrategia que ustedes trabajaron de la autoexplicación y la propuesta del entrenamiento" (E2E1)

Posteriormente en esta categoría se buscaba extraer recomendaciones en base de sus experiencias para el mejoramiento en futuras intervenciones del entrenamiento de autoexplicación, para todas estas verbalizaciones se les asignó el código *recomendaciones de intervención*, las unidades de análisis que hablan sobre ello son:

> "desde mi punto de vista es una estrategia fácil de comprender, como que no tiene cosas muy estructuradas y creo que a mi parecer es fácil de comprender y creo que con una o dos sesiones sería suficiente." (E1E2)

> "Bueno, ustedes pues trabajaron una sola sesión, pues yo consideraría que entre dos o tres sesiones, para que, para llegar a un punto donde uno diga, el proceso es así, se trabaja así, entonces qué otros caminos se puede seguir, como se puede implementar, y que fundamentación me permite aplicar eso digamos" (E2E2)

> "... de un contexto simplemente como una prueba, aplicarlo a una realidad en un contexto de aula de clase, en donde uno vaya a desarrollar la técnica de autoexplicación."

Ambos entrevistados manifiestan en común que sea dedicado para el entrenamiento más de una sesión y así pueda ser asimilado, además recomiendan que el entrenamiento sea aplicado en un entorno pedagógico genuino.

4.2.3. Después del entrenamiento de autoexplicación

En la tabla 10 son presentados los códigos de la última categoría, tales códigos son los siguientes: *Aplicación del entrenamiento de autoexplicación, crítica a la enseñanza tradicional, recomendaciones de cambio en la enseñanza, recomendaciones de cambio en la evaluación y* algunas definiciones. En esta categoría, se solicita a los entrevistados que expresen sus impresiones sobre las teorías utilizadas en el estudio, su aplicabilidad y su potencial en el desarrollo del programa académico. Sobre la *aplicación del entrenamiento de autoexplicación* los entrevistados narran lo siguiente:

> "Pues ya al tener eso en mente como que ya iba más despacio, necesito leer la pregunta que me quieren decir y ya realmente como que se tomaba uno ese tiempo de comprender, no simplemente leer por encima sino saber lo que están haciendo y así llegar a una respuesta adecuada y trataba de comprender lo que estaban diciendo para seguir con el proceso." (E1D1)
>
> "En cuanto al momento de aplicarlo, pude pues digamos, llegar a un punto de decir ¡eh mire!, comprendo lo que está escrito de una manera más sencilla en donde digamos llega a un punto en donde uno no sabe qué hacer, ni sabe por dónde empezar, ni sabe cómo va a desarrollar lo que está ahí en la hoja y se queda como bloqueado, pero al momento de aplicar ese proceso de autoexplicación, uno empieza a decir bueno puedo escoger este camino, puedo llegar de esta manera a la respuesta" (E2D4)

Tabla 10. Códigos que conforman la categoría: Durante el entrenamiento de autoexplicación.

<table>
<tr><th></th><th>Entrevistado 1</th><th>Entrevistado 2</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Códigos</td><td colspan="2">Aplicación del entrenamiento de autoexplicación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Crítica a la enseñanza tradicional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recomendaciones de cambio en la enseñanza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recomendaciones de cambio en la evaluación</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Evaluación de la comprensión</td><td>Definición de prueba diagnóstica</td></tr>
<tr><td>Definición de evaluación</td></tr>
</table>

Ellos confirman el uso de las estrategias del entrenamiento, pero cada uno a su manera. El entrevistado 1 combina su estrategia de *lectura intensiva* con las estrategias del entrenamiento de autoexplicación para facilitar su comprensión. Por su parte, el segundo entrevistado reafirma la dificultad que ha tenido al comprender demostraciones y asegura que al aplicar las estrategias de autoexplicación encuentra vías para comprenderlas.

El segundo código denominado *crítica a la enseñanza tradicional,* los estudiantes relatan sobre lo que consideran problemas de esta metodología, sus relatos sobre ellos son:

> "...porque son conocimientos que se quedan ahí, porque muchas veces como que le preguntan lo procedimental, uno se aprende lo procedimental y ya luego cuando uno va a hacer algo queda ponchado" (E1D10)
>
> "si llegamos a un punto donde se pueda aplicar o evaluar de manera que se llegue a un punto de comprensión o un análisis concreto de algo que está siendo demostrado, no simplemente el hecho de aplicarlo, bueno como se hacía antes que me llenaban de un conocimiento y lo "vaceo" todo en lo que tengo que demostrar"

Aquí los estudiantes expresan en sus relatos su inconformidad con la manera tradicional de la enseñanza de las demostraciones, de forma análoga como fue descrito en el planteamiento del problema, en donde se menciona que por lo general la comprensión de demostraciones en los estudiantes se mide pidiéndoles que reproduzcan o hagan ligeros cambios al momento de demostrar un teorema similar (Conradie & Frith, 2000; Rowland, 2001; Schoenfeld, 1988 y Weber, 2011).

Además de las críticas que los entrevistados realizaron al modelo de enseñanza bajo el que fueron instruidos durante las asignaturas cursadas en el programa, mencionan los posibles cambios que podrían realizarse para contribuir con la mejora en la comprensión de las demostraciones. A está propuesta se les dio el código de *recomendaciones de cambio en la enseñanza,* en donde ambos entrevistados resaltaron la importancia entre mantener un equilibrio entre la construcción y comprensión de las demostraciones en el momento de desarrollar las explicaciones en el aula de clase.

> "En ese caso debería haber un punto de equilibrio entre ambas cosas, punto de equilibrio entre ambos procesos se pueda llevar a cabo un mejor desarrollo de las habilidades en el momento de resolver demostraciones." (E2D15)

> "... haya un equilibrio entre las dos situaciones porque a veces de que me sirve como saber o… en casos uno se poncha en no saber comprender la demostración, pero creería que es un equilibrio entre las dos partes, tanto la comprensión como lo procedimental" (E1D10)

Otro aspecto que mencionan los dos, se encuentra relacionado con la enseñanza de herramientas que les permita avanzar de manera autónoma en las circunstancias que presenten dificultades, progresando a partir de un análisis comprensivo de los elementos de la demostración que se están presentando.

> "sino de cómo comprender el proceso que me lleva a dar solución a una demostración de tal forma que yo no simplemente la solucione por inercia, simplemente porque lo tengo que hacer, que me digan no, esto se hace de esta manera, se puede hacer de otra manera, puede encontrar el camino a seguir de una manera más didáctica y no simplemente de una manera autónoma que es simplemente resolver y resolver y ya." (E2D14)

> "...uno debe enseñarle a los estudiantes que comprendan el proceso y puedan hacer los otros ejercicios, no solo como que okey me explicaron ese y entonces hago ejercicios parecidos. Sí ya comprendo las cosas puedo generalizar o relacionar procesos" (E1D6)

Por último, los estudiantes mencionan algunas características referentes a la práctica pedagógica de los docentes, centrada en la explicación de los pasos deductivos que son realizados en una demostración en específico, sin embargo, los estudiantes sienten que debe presentarse una explicación más profunda, acerca de la relación entre la consecución de las líneas de la demostración y las razones para comprender dicha derivación.

> "... los profesores se enfocan en explicar la demostración, pero no en cómo hacerla o como comprenderla que es diferente a explicarla que nos lleven en ese proceso, lo mismo en uno como maestro que explico el proceso, pero no" (E1D5)
>
> "... a veces los docentes pues solamente se fundamentan en la base de, esta es la demostración, tiene que hacerlo por este método, si lo entendió bien, si no lo entendió pues mire a ver qué hace, cómo lo comprende, cómo lo analiza por su lado, ya le expliqué cómo se hace" (E2D9)

Del mismo modo que realizaron recomendaciones sobre cambios en la enseñanza durante sus discursos, también se extrajeron *recomendaciones de cambio en la evaluación.* Al preguntarles su preferencia entre la construcción o la comprensión de las demostraciones, el entrevistado 1 en uno de sus discursos expresa que:

> "Pues más fácil o más llamativo pues la comprensión, porque realmente pues son cuestiones que lo ponen a pensar a uno y que realmente como que le van a ayudar a posterior" (E1D9)

El entrevistado 1 encuentra preferencia en las pruebas de comprensión y además destaca que le encuentra mayor utilidad a futuro. De forma similar el segundo entrevistado expone su preferencia en las preguntas de comprensión al momento de ser evaluado cuando relata que:

> “puedo tratar de resolucionar las preguntas que están ahí de acuerdo a algo que nos están explicando como un paso a paso donde puedo hacer o pueda desarrollar y no simplemente el hecho de resuelva y ya.” (E2D5)

Por último, las codificaciones relacionadas con la evaluación, responden a la pregunta ¿Qué relación encuentra entre la prueba diagnóstica y la segunda prueba?, encontrando diferencias en sus respuestas, El entrevistado 1 identifica en ambas pruebas su relación con el modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones, pero omite su papel de diagnóstico como se puede observar en su relato:

> “No, porque en la primera prueba pues daban como, si mal no me equivoco daban un proceso completo y las preguntas giraban en torno a la comprensión de la demostración, y no como que demuestre y cosas así, y eso es lo que buscaba también la segunda prueba, como que preguntas que llevarán como ese análisis, esa comprensión de lo que se hacía, entonces si había…” (E1D3)

Por contraparte, el segundo entrevistado identifica el papel diagnóstico de la primera prueba, y además la encuentra necesaria para poder resolver la segunda prueba, dándole a ésta una definición general de evaluación tal como se observa en su narración:

> “En cuanto a la prueba diagnóstica es digamos observar más que todo lo que nosotros digamos conocíamos o entendíamos o recordábamos acerca de ese contexto de las demostraciones y pues abordar en la segunda prueba la relación se puede decir que hay es como digamos, cómo aportar esos conocimientos que yo tenía o que están ahí, de una manera más sencilla pero con un digamos, un paso a paso de una estructura ya como que tengo que hacerlo sino cómo hacerlo” (E2D6 , E2D7)

El análisis de contenido ascendente proporcionó una descripción de las características manifiestas de los datos que se identificaron al principio como relevantes para su estudio. El método permitió ampliar el esquema de codificación inicial que parecía adecuado con respecto a la pregunta de investigación, de manera que se convirtió en adecuado con respecto a los datos.

5. Discusión

5.1. Comparativa entre los resultados de la prueba de diagnóstica y de comprensión

Los resultados presentados previamente indican que los estudiantes cambian la forma en cómo comprenden las demostraciones matemáticas mediante el entrenamiento de autoexplicación. Desde el enfoque cuantitativo lo evidenciamos al hacer un contraste en sus niveles de desempeño tal como se presenta en la tabla 11.

Tabla 11. Contraste en los niveles de desempeño alcanzados entre la prueba diagnóstica y la prueba de comprensión.

Niveles de desempeño alcanzados por los estudiantes	
P. Diagnóstica	P. Comprensión
Alto: 2 estudiantes	Alto: 3 estudiantes
Medio: 2 estudiantes	Medio: 6 estudiantes
Bajo: 5 estudiantes	Bajo: 0 estudiantes

Como se observa en los niveles de desempeño, a nivel de grupo hubo una mejora destacable, al pasar en el desempeño alto de 2 estudiantes a 3, desempeño medio de 2 a 6 estudiantes y desaparece el desempeño bajo al pasar de 5 a ninguno. Sin embargo, ninguno de ellos alcanza un nivel superior, esto puede deberse a diversos motivos, como lo es el número de sesiones aplicadas o el hecho de haber sido aplicado a estudiantes que llevaban tiempo sin cursar alguna asignatura que implican demostraciones.

La tabla 12, presenta la comparación de lo que llamamos potencialidades del grupo en base a las dimensiones del modelo de evaluación alcanzadas por el grupo, como fue mencionado en los resultados, denominamos potencialidades todas aquellas dimensiones en las que por lo menos 5 estudiantes puntuaron positivamente en las preguntas relacionadas a cada dimensión. Teniendo en cuenta lo anterior, observamos que el grupo no solo mantuvo la única dimensión alcanzada en la prueba diagnóstica, sino que lograron medianamente o en su totalidad cuatro dimensiones más.

Tabla 12. Contraste en las potencialidades alcanzados entre la prueba diagnóstica y la prueba de comprensión en base a las dimensiones del modelo de comprensión alcanzadas por el grupo

Potencialidades en base a las dimensiones alcanzadas por el grupo	
P. Diagnóstica	P. Comprensión
D5: *Identificación de la estructura modular*	D1: *Significado de términos y declaraciones*
	D3: *Justificación de reclamaciones*
	D5: *Identificación de la estructura modular*
	D6: *Transferir las ideas o métodos generales a otro contexto*
	D7: *Ilustrar con ejemplos*

Comparando los resultados con los hallazgos de los autores del entrenamiento de autoexplicación, observamos que son similares. Hodds et al. (2014) validaron su entrenamiento con estudiantes de matemáticas de la universidad de Loughborough y encontraron mejoras en la comprensión utilizando muestras más grandes. Otros estudios trabajaron con el modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones, sin embargo, no utilizaron el entrenamiento de autoexplicación. Además, cabe mencionar que el presente estudio no es de tipo experimental al no tener control sobre todas las variables influyentes, por lo tanto, hablamos del entrenamiento de autoexplicación, como variable predictora, destacando la correlación encontrada.

5.2. Comparativa entre la encuesta de satisfacción y las entrevistas

La encuesta de satisfacción es un instrumento que permitió encontrar la actitudes y disposiciones de los estudiantes frente a las etapas desarrolladas en la investigación, del mismo modo, es utilizada cómo un puente entre las etapas cuantitativas y cualitativas, puesto que, las respuestas dadas en la entrevista se diseñaron directamente para ser relacionadas con los ítems planteados en la encuesta. La respuesta de los ítems muestra una visión general del grupo, mientras que la entrevista, presenta con más detalle las experiencias de los estudiantes con el proceso llevado a cabo. Para realizar una comparación entre ambas se revisan los códigos obtenidos de la entrevista que se encuentran relacionados con las secciones de la encuesta, con el propósito de ampliar las impresiones y experiencias de las etapas del estudio.

Tabla 13. Respuestas dadas por los estudiantes en el apartado entrenamiento de autoexplicación

	Preguntas							
Nivel de satisfacción	1	2	3	4	5	6	7	Total
TA	3	4	8	2	1	1	2	21
DA	6	5	1	2	5	6	5	30
NI	0	0	0	5	3	2	2	12
ED	0	0	0	0	0	0	0	0
TD	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	9	9	9	9	9	9	9	63

En la tabla 13 se presentan las respuestas del apartado denominado *entrenamiento de autoexplicación*, estaba conformado por preguntas que están relacionadas con la aplicabilidad y la organización del mismo. La primera pregunta *¿Utilizarías las estrategias de autoexplicación para estudios de postgrado?* se puede observar en la tabla que 6 de las nueve personas están de acuerdo y 3 totalmente de acuerdo, siendo de modo correspondiente, a lo mencionado por el entrevistado 1

> "Pues más fácil o más llamativo pues la comprensión, porque realmente pues son cuestiones que lo ponen a pensar a uno <u>y que realmente como que le van a ayudar a posterior"</u> (E1D9)

Haciendo referencia a su aplicación a futuro, de manera indirecta contribuyendo en su evolución del perfil ocupacional y profesional. De otra manera se encontró que uno de los entrevistados consideró que el entrenamiento de autoexplicación cómo una herramienta que facilita la comprensión de las demostraciones al mencionar que:

> "... al momento de aplicar ese proceso de autoexplicación, uno empieza a decir bueno puedo escoger este camino, puedo llegar de esta manera a la respuesta" (E2D4)

Dicha unidad de análisis está relacionada con el código: *Aplicación de la estrategia de autoexplicación,* presentando concordancia con las respuestas dadas por la gran mayoría de encuestados frente a la pregunta 4: *¿El entrenamiento de autoexplicación podría convertirse en un distractor a la hora de comprender demostraciones?,* en la cual 5 de las 9 personas presentan una posición neutral y 4 de ellas están en desacuerdo y totalmente en desacuerdo.

Por último, se analiza si lo estudiantes consideraron que lograron asimilar la estrategia de autoexplicación con la intervención realizada, tanto en la entrevista cómo en la encuesta los estudiantes manifestaron que habían logrado entender los pasos a seguir, del código *recomendación de intervención* se toma por ejemplo la unidad de análisis de entrevistado 1, en donde comenta que:

> "Pues, desde mi punto de vista es una estrategia fácil de comprender, como que no tiene cosas muy estructuradas y creo que a mi parecer es fácil de comprender y creo que con una o dos sesiones sería suficiente" (E1E2)

Lo anterior converge con lo encontrado en la encuesta, en donde las respuestas obtenidas ante la pregunta 5: *¿Considera que asimiló por completo el entrenamiento de autoexplicación?,* a la cual 5 de los 9 están de acuerdo.

A partir de lo descrito anteriormente se puede concluir que a modo general se presenta una predominancia de una actitud positiva, reflejándose con 80,9% en los niveles de satisfacción con la máxima puntuación.

Tabla 14. Respuestas dadas por los estudiantes en el apartado *Modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones*

	Preguntas				
Nivel de satisfacción	1	2	3	4	Total
TA	0	2	1	2	5
DA	5	6	4	3	18
NI	4	1	3	4	12
ED	0	0	0	0	0
TD	0	0	1	0	1
Total	9	9	9	9	36

En la tabla 14 se presenta los resultados del apartado Modelo *de evaluación de la comprensión de las demostraciones*, en este apartado se conecta con las modalidades bajo las cuales habían sido evaluada las demostraciones en el transcurso del programa académico y sus impresiones al resolver preguntas que implican la comprensión. En la primera pregunta de la encuesta: *¿Considera que una prueba de comprensión requiere una mayor dificultad que hacer una demostración?* 5 de los estudiantes contestaron que estaban de acuerdo, está situación puede verse justificada en las formas en cómo son orientadas las asignaturas de este eje disciplinar y su evaluación conectándose con el código denominado *crítica a la enseñanza tradicional.* Al respecto el entrevistado 1 comenta:

> "…los profesores se enfocan en explicar la demostración, pero no en cómo hacerla o como comprenderla que es diferente a explicarla que nos lleven en ese proceso, lo mismo en uno como maestro que explico el proceso, pero no" (E1D5)

Sin embargo, el entrevistado 1 difiere de lo encontrado en las encuestas, afirmando que le parecen más fáciles las preguntas que están relacionadas con la comprensión, difiriendo de la mayor parte.

> "Pues más fácil o más llamativo pues la comprensión, porque realmente pues son cuestiones que lo ponen a pensar a uno y que realmente como que le van a ayudar a posterior" (E1D9)

Por otra parte, también a los encuestados se les realizó la pregunta 2: *¿Crees que el entrenamiento de autoexplicación está relacionado con la forma de evaluarlo en la segunda prueba?*, a los 6 de ellos respondieron que estaban de acuerdo, al igual que lo hicieron ambos entrevistados al responder:

> "No, porque en la primera prueba pues daban como, si mal no me equivoco daban un proceso completo y las preguntas giraban en torno a la comprensión de la demostración, y no como que demuestre y cosas así, y eso es lo que buscaba también la segunda prueba, como que preguntas que llevarán como ese análisis, esa comprensión de lo que se hacía, entonces si había" (E1D3)

Dado que ambos resultados convergen se puede inferir que la gran mayoría de los estudiantes lograron establecer las similitudes entre ambas pruebas, y de modo implícito empezaron a reconocer que había un patrón entre lo preguntado en la prueba diagnóstica y la prueba de comprensión.

Por último, se presenta la pregunta 3 de este apartado: *¿Ha sido evaluada su comprensión durante el transcurso del programa académico?* en donde se encontró que 4 estudiantes estaban de acuerdo y 1 totalmente de acuerdo, datos que presentan diferencia en lo expuesto con los entrevistados, ya que, ellos manifestaron que las evaluaciones normalmente se centran en construir demostraciones similares a las vistas en clases, pero con ligeros cambios.

“La verdad no, siempre fue como que le daban este enunciado, este teorema, demuéstrelo como usted pueda” (E1D4)

“...la verdad nunca ha sido evaluada como esa comprensión que uno puede llegar a tener de una demostración, solo es resolverla y ya” (E2D11)

Tabla 15. Respuestas dadas por los estudiantes en el apartado *Intervención*

	Preguntas							
Nivel de satisfacción	1	2	3	4	5	6	7	Total
TA	1	3	3	0	6	6	4	23
DA	1	4	6	7	3	3	5	29
NI	3	2	0	2	0	0	0	7
ED	3	0	0	0	0	0	0	3
TD	1	0	0	0	0	0	0	1
Total	9	9	9	9	9	9	9	63

Para finalizar las comparaciones entre lo encontrado en la encuesta y la entrevista se realiza la descripción del apartado denominado *intervención,* en el cual se toman las características de la misma y los recursos utilizados para su ejecución. La primera pregunta de la cuenta: *¿Considera que una sesión es suficiente para comprender el entrenamiento de autoexplicación?,* las valoraciones dadas se encuentran concentradas en el nivel de satisfacción en desacuerdo y totalmente de acuerdo y 3 de ellos en una actitud neutral. Ante esto, el código que relaciona con la entrevista se denomina *recomendaciones de intervención*, en la que los dos entrevistados presentan respuestas que difieren un poco entre ellos. El entrevistado 1 menciona que con una o dos sesiones sería suficiente, al contrario, el entrevistado 2 sugiere dos o tres sesiones.

De manera similar a los resultados del estudio, investigaciones anteriores también señalaron que muchos estudiantes expresaron dificultades con la comprensión de las demostraciones (por ejemplo, Moore, 1994; Kolahdouz et al., 2019; Neuhaus & Rach, 2019; Belín & Akar, 2020). En el estudio de Kolahdouz et al. (2019), quien realizó su estudio con estudiantes de licenciatura en matemáticas de una universidad en Irán, encontró de manera similar a nuestros hallazgos que los estudiantes utilizaban el aprendizaje memorístico ante la incapacidad de comprender las demostraciones.

5.3. Factor diferencial y recomendaciones

El diseño metodológico del presente estudio se inspira en estudios anteriores en relación con el modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones matemáticas por parte de los estudiantes. En la tabla 16 se presentan los aspectos metodológicos de los principales estudios que abarcan la comprensión hasta la fecha.

De los estudios presentados en la **tabla 16**, se determina que el diseño del presente estudio es único en su clase, porque la mayoría abarca desde un enfoque cuantitativo y solo el trabajo de Kolahdouz et al. (2019) usa el enfoque mixto, sin embargo, su enfoque cualitativo busca extender lo encontrado en las pruebas de comprensión; la presente investigación usa un enfoque mixto anidado con dominancia cuantitativa basada en las vivencias y experiencias de los estudiantes, utilizando encuestas de satisfacción y entrevistas semiestructuradas para conocer más a fondo el impacto de las estrategias y del modelo de evaluación desde la perspectiva de los estudiantes.

Tabla 16. Identificación de las metodologías aplicadas

	Hodds et al. (2014)	Kolahdouz et al. (2019)	Neuhaus et al. (2019)	Belin et al. (2020)
Metodología	Cuantitativo	Mixto	Cuantitativo	Cuantitativo
Muestra:	107 estudiantes de primer año de matemáticas	110 estudiantes de primer año	64 estudiantes, 30 de matemáticas y 34 de licenciatura en matemáticas	19 estudiantes de licenciatura en matemáticas
Instrumentos	Pruebas de comprensión	Pruebas de comprensión y entrevistas (Buscan justificación de preguntas de la prueba de comprensión)	Pruebas de comprensión y encuestas sobre interés, autoconcepto o conocimientos previos	Pruebas de comprensión
Contenido	Entrenamiento de autoexplicación	Intervención sobre el teorema de valor medio generalizado de Cauchy	Estrategias de lectura de Weber (2015) y entrenamiento de autoexplicación	Razonamiento cuantitativo

Otra gran diferencia, es que todos los estudios hasta ahora han realizado dos pruebas de comprensión algunos a modo de pre-test y post-test, otros con dos pruebas distintas antes y después de una intervención, sin embargo, en el presente estudio se usa una prueba de menor dificultad antes de las intervenciones y que a su vez sirva de diagnóstico para identificar sus fortalezas y debilidades. No siendo de menor importancia, es destacable de la presente investigación, ser pionero en idioma español y por ende ser pionero en ser aplicado en los países de habla hispana, tomando como base lo encontrado en bases de datos al momento de ser publicado este trabajo de grado.

Como aspectos a tener en cuenta para futuras investigaciones, está que las pruebas de comprensión utilizadas en este estudio, sólo se refieren a un tema matemático que es la teoría de números; hace falta investigar en una mayor gama de áreas de la matemática. Además, la muestra trabajada es bastante pequeña y los estudiantes sólo informan de una autoestimación de sus características individuales y de su uso de las estrategias de lectura de demostraciones, no se hallaron pruebas reales de cómo y con qué frecuencia utilizan realmente las estrategias del entrenamiento de autoexplicación, por eso es menester reproducir los resultados presentados con una muestra mayor. Con este estudio, se ha dado un primer paso para profundizar en el concepto de comprensión de pruebas que puede ayudar en el futuro a apoyar a los estudiantes en esta actividad.

6. Conclusiones

La experiencia llevada a cabo en el presente estudio nos conlleva a analizar las características de los estudiantes desde una fase inicial y una fase final para poder determinar cambios. En la búsqueda de la literatura acerca de la comprensión de las demostraciones, se encontraron distintos enfoques para trabajarla, por motivos de novedad, impacto, profundidad y cercanía a lo que se considera el problema y la realidad que se enfrentan los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas con las demostraciones matemáticas, se selecciona el trabajo de Mejía-Ramos et al. (2012) como base fundamental de toda la investigación.

Al realizar un seguimiento de las estrategias que sean útiles para mejorar esa comprensión, se descartaron múltiples estudios que, aunque tenían la apariencia de favorecer dicha comprensión, en posteriores estudios se comprobó que estaban sirviendo como distractor, sin presentar cambios en sus resultados en pruebas. o que no mostraban cambios representativos en muestras más grandes. Por ello, al realizar un seguimiento minucioso en esa línea de investigación se presenta el entrenamiento de autoexplicación como estrategia más reciente y la cual presenta un éxito en universidades de alto desempeño de Inglaterra.

Teniendo en cuenta estas teorías innovadoras, se inicia la investigación estableciendo esa comprensión de los estudiantes en un primer momento, y acorde a lo reportado en un estudio anterior realizado en la UFPS y estudios realizados en distintas partes del mundo, los estudiantes hallan las demostraciones confusas, o sin sentido, sumado a que poseen carencias de conocimiento sobre las definiciones de términos y declaraciones, cómo usarlos en una demostración, falta de comprensión de los conceptos, métodos de demostración y falta de generación y uso de ejemplos.

Al momento de realizar la intervención del entrenamiento de autoexplicación, los estudiantes se mostraron atentos y dispuestos a las instrucciones dadas, algunos de ellos presentaban asombro al utilizar cada una de las estrategias del entrenamiento y cómo cada una de ellas les ayudaban a comprender una demostración. En esta intervención también se trató de traer aquellos conceptos de lógica y métodos de demostración para facilitar la comprensión de las demostraciones presentadas en el folleto. También se les pidió a los estudiantes que revisaran las estrategias vistas y realizaran un estudio de folleto antes de la siguiente etapa de la investigación.

Posterior a la intervención, es aplicada una segunda prueba denominada *prueba de comprensión* la cual presentaba un mayor grado de dificultad al abordar una demostración con preguntas directamente relacionadas con la comprensión de ella, midiéndose a través de las dimensiones propuestas por Mejía Ramos et al. (2012). En esta prueba en modo general los estudiantes demostraron una comprensión superior, al tener la capacidad de identificar múltiples aspectos de la demostración. Lograron un dominio de términos y definiciones, justificar el papel de ciertas líneas para la demostración, usar esas ideas en demostraciones similares y poder aplicar en ejemplos las ideas de la demostración utilizada.

Con base a esta diferencia, es posible responder a los cambios encontrados. El grupo en un primer momento se encontró con múltiples dificultades para la comprensión de las demostraciones y pese a que la segunda prueba se utiliza una demostración totalmente nueva y desconocida para ellos lograron mejorar drásticamente la forma en cómo leen una demostración ya que, al seguir las estrategias propuestas en el entrenamiento, lograron abarcar mayor cantidad de dimensiones dentro de lo que implica, comprender una demostración. Sin embargo, es necesario profundizar en futuros estudios la relación de causa y efecto del entrenamiento en la comprensión de las demostraciones.

La construcción y la comprensión de las demostraciones hacen parte de los cuatro conceptos encontrados por Selden & Selden (2017) en torno a las actividades demostrativas. A partir de la entrevista se pudo evidenciar que la construcción de las demostraciones es de las actividades con mayor relevancia en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la UFPS, mostrándose sobre todo en el momento que se evalúan los conocimientos que son necesarios para avanzar en la siguiente asignatura. Esta situación ha traído consigo que los estudiantes busquen estrategias que les permitan validar dicho conocimiento, y ante las dificultades que se les presenten sortearlas de la mejor manera.

Una de las estrategias que se encontró como alternativa es el *aprendizaje memorístico*, ya que permite la reproducción de la demostración solicitada, aunque no es la única estrategia hallada, por ejemplo, uno de los entrevistados menciona que trata de fijarse en los detalles y analizar cuidadosamente la información que le están presentando, lo que a grandes rasgos representa las características de la *lectura intensiva.* De otra manera, tampoco se puede afirmar que solo sean esas dos estrategias, posiblemente puedan existir otras dentro del estudiante que participaron en el estudio.

En esta pesquisa se optó por presentarle a los estudiantes el entrenamiento de autoexplicación, puesto que, es una herramienta constituida por preguntas reflexivas acerca de cada una de las líneas que componen una demostración, utilizada en otras áreas del conocimiento y adaptada por Hodds et al. (2014) en las áreas que implican las demostraciones matemáticas. De momento se desconoce si alguno de los estudiantes conocía el entrenamiento, o dado el caso había desarrollado una estrategia similar de manera intuitiva. En adición, a partir de lo comunicado por los entrevistados, se puede inferir que la ausencia de enseñanzas centradas en la comprensión se debe al enfoque por el cual realizan las evaluaciones en el programa académico.

El entrenamiento de autoexplicación coadyuvó en extender el concepto de comprensión de las demostraciones desde el modelo propuesto por Mejía-Ramos et al. (2012), puesto que la reflexión continua sobre cada línea pone en el estudiante la necesidad de reconocer lo que conoce y desconoce, y de ese modo entender cómo se relacionan los elementos que se están mencionando en esa línea, para su posterior integración con el resto de la lectura de la demostración y así seguir con los procesos que implican una comprensión total de lo que se encuentra en la demostración.

Como factor diferencial del estudio está el tener a consideración las impresiones, actitudes y experiencias de los estudiantes, por lo tanto, al realizar las encuestas y entrevistas, se hallan mayoritariamente puntos de vista compartidos entre ambos hallazgos. Los estudiantes encuentran en común que las estrategias pueden ser útiles para sus estudios de posgrado, esto teniendo en consideración que la muestra de estudio se encuentra en el último año de sus estudios. También encuentran que las pruebas de comprensión implican mayor dificultad de análisis debido a que la enseñanza se ha centrado en generar herramientas para la construcción de las demostraciones. Por último, cabe concluir que la autoexplicación puede reparar y enriquecer el conocimiento existente para hacerlo más preciso o mejor estructurado, y facilita la construcción de reglas de inferencia utilizadas para formar principios generales (McEldoon , Durkin & Rittle-Johnson, 2013).

7. Referencias Bibliográficas

Ainsworth, S., & Burcham, S. (2007). The impact of text coherence on learning by self-explanation. *Learning and Instruction*, 17(3), 286–303. doi:10.1016/j.learninstruc.2007.02.004

Alcock, L. (2009). e-Proofs: Student experience of online resources to aid understanding of mathematical proofs. *In Proceedings of the 12th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. Raleigh*, NC: Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education.

Argueta Villamar, H. d. J., & Linares Altamirano, M. J. (s.f.). Método por Casos. Lógica. Método por casos. Recuperado el 8 de Marzo de 2022, de http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Logica/l_logica10_d.html

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Atkinson, R. K., Renkl, A. & Merrill, M. M. (2003). Transitioning From Studying Examples to Solving Problems: Effects of Self-Explanation Prompts and Fading Worked-Out Steps. *Journal of Educational Psychology, 95*(4), 774–783. doi: 10.1037/0022-0663.95.4.774

Arias, F. G. (2012). El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica. 6ta. Fidias G. Arias Odón.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. Retrieved January 18, 2021, Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/3482413.

Belin, M., & Akar, G. K. (2020). The effect of quantitative reasoning on prospective mathematics teachers' proof comprehension: The case of real numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 57, 100757. doi:10.1016/j.jmathb.2020.100757

Ben-Zvi, D. & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. Education & Didactique, 1(3), 117-134. Recuperado de: https://journals.openedition.org/educationdidactique/241?lang=es#

Berthold, K., & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 70–87. doi:10.1037/a0013247

Berthold, K., Röder, H., Knörzer, D., Kessler, W., y Renkl, A. (2011). The double-edged effects of explanation prompts. *Computers in Human Behavior*, 27(1), 69–75. doi:10.1016/j.chb.2010.05.025

Betancort Alvarez & Arnaldos (s.f.). CH media de la Normal (sigma desconocida): decisión. Test de hipótesis, Medias. R ecuperado de: https://www.geogebra.org/m/arcxtz8q

Blanco Sarmiento, E. (2014). Intensive reading based on cross curricular topics : a strategy to foster students' reading comprehension. Universidad de La Sabana.

Booth, J. L., Lange, K. E., Koedinger, K. R. & Newton, K. J. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: *Differentiating between correct and incorrect examples. Learning and Instruction, 25, 24–34.* doi:10.1016/j.learninstruc.2012.11.002

Cavana, R. Y., Delahaye, B. L., & Sekaran, U. (2001). Applied business research:Qualitative and quantitative methods (Australian ed.). Milton, Queensland,Australia: J. Wiley.

Chi, M. T. H. (2000). Cognitive understanding levels. In A. E. Kazdin (Ed.), Encyclopedia of psychology (Vol. 2, pp. 172–175). American Psychological Association.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-Explonations: How Students Study and Use Examples in Learning to Solve Problems. *Cognitive Science*, *13*(2), 145-182.

Chi, M. T. H., de Leeuw, N., Chiu, M.-H., & LaVancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science*, 18(3), 439–477.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2001). *Designing and Conducting Mixed Methods Research* (V. L. Plano Clark & J. W. Creswell, Eds.). SAGE Publications. First edition

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and Conducting Mixed Methods Research* (V. L. Plano Clark & J. W. Creswell, Eds.). SAGE Publications. Second edition

Conradie, J. & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. Educational Studies in Mathematics, 42(3), 225-235. Doi: https://doi.org/10.1023/A:1017502919000

DeCaro, M. S., & Rittle-Johnson, B. (2012). Exploring mathematics problems prepares children to learn from instruction. *Journal of Experimental Child Psychology,* 113(4), 552–568. doi:10.1016/j.jecp.2012.06.009

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Math, Science y Technology Education*, *4*(3), 397-418.

Dulock, H. L. (1993). Research Design: Descriptive Research. *Journal of Pediatric Oncology Nursing*, 10(4), 154–157. doi:10.1177/104345429301000406

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction, 22(3), 206–214.* doi:10.1016/j.learninstruc.2011.11.001

Erlingsson, C., & Brysiewicz, P. (2017). A hands-on guide to doing content analysis. African journal of emergency medicine, 7(3), 93-99.

Etikan, I., & Bala, K. (2017). Sampling and sampling methods. Biometrics & Biostatistics International Journal, 5(6), 00149.

Fonseca, B. A., & Chi, M. T. (2011). Instruction based on self-explanation. *Handbook of research on learning and instruction*, 296-321.

Garcia, L., & Quek, F. (1997, May/June). Qualitative research in information systems:Time to be subjective? *International Conference on Information Systems and Qualitative Research*,Philadelphia, PA.

Guirao-Goris,J.A; Olmedo Salas,A &Ferrer Ferrandis, E.(2008) El artículo de revisión. Revista Iberoamericana de Enfermería Comunitaria, 1, 1, 6. Recuperado de https://www.uv.es/joguigo/valencia/Recerca_files/el_articulo_de_revision.pdf

Godino, Juan D. & Recio, Angel M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencia*s, 19(3), pp. 405-414. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/38990678.pdf

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange, 21(1), 6–13. doi:10.1007/bf01809605

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. American Mathematical Society, 7, 234-283. Recuperado de: https://math.ucsd.edu/~harel/Students%27%20Proof%20Schemes.pdf

Harel, G. & Sowder, L. (2007) Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In: Lester, F., Ed., Second Handbook of Research on Mathematics Education. Recuperado de: https://math.ucsd.edu/~harel/TowardComprehensivePerspective.pdf

Hernández-Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2018). Metodología de la investigación (Vol. 4, pp. 310-386). México: McGraw-Hill Interamericana.

Hernández-Suarez, C. A. (2012). Caracterización de la actividad demostrativa en estudiantes de educación superior. Ecomatemático, 3(1), 36-43. Recuperado de: https://revistas.ufps.edu.co/index.php/ecomatematico/article/view/118/1546

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 389-399.

Hodds, Alcock, & Inglis. (2014). Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 62-101. doi:10.5951/jresematheduc.45.1.0062

Klein, H., & Myers, M., (1999), "A Set of Principals for Conducting and Evaluating Interpretive Field Studies in Information Systems", *MIS Quarterly*, Vol 23, No 1, pp 67-94.

Kolahdouz, F., Radmehr, F., & Alamolhodaei, H. (2019). Exploring students' proof comprehension of the Cauchy Generalized Mean Value Theorem. T*eaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, 1-20. doi:10.1093/teamat/hrz016

Laboratorio de Economía de la Educación (LEE) de la Pontificia Universidad Javeriana. (2020). Un análisis sobre los programas de las ciencias de la educación. Recuperado de https://economiadelaeducacion.org/docs/

Lavrakas, P. J. (2008). Encyclopedia of survey research methods. Sage publications.

Leavy, P. (2017). *Research Design: Quantitative, Qualitative, Mixed Methods, Arts-Based, and Community-Based Participatory Research Approaches*. Guilford Publications.

Legare, C. H., Gelman, S. A., & Wellman, H. M. (2010). Inconsistency With Prior Knowledge Triggers Children's Causal Explanatory Reasoning. *Child Development, 81(3), 929–944.* doi:10.1111/j.1467-8624.2010.01443.x

Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-184.

Maher, C. A., & Sigley, R. (2020). Task-based interviews in mathematics education. Encyclopedia of mathematics education, 821-824.

Martínez, C. (2012). Estadística y muestreo-13ra Edición. Ecoe ediciones.

Matthews, P., & Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: Comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. *Journal of Experimental Child Psychology*, 104(1), 1–21. doi:10.1016/j.jecp.2008.08.004

McEldoon, K. L., Durkin, K. L., & Rittle-Johnson, B. (2013). Is self explanation worth the time? A comparison to additional practice. *British Journal of Educational Psychology*, 83, 615–632. doi: 10.1111/j.2044-8279.2012.02083.x

Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, y M. de

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3–18. doi:10.1007/s10649-011-9349-7.

Mejía-Ramos, J. P., Lew, K., de la Torre, J., & Weber, K. (2017). Developing and validating proof comprehension tests in undergraduate mathematics. Research in Mathematics Education, 19(2), 130–146. doi:10.1080/14794802.2017.1325776

Mejía-Ramos, J. P., & Weber, K. (2020). Using task-based interviews to generate hypotheses about mathematical practice: mathematics education research on mathematicians' use of examples in proof-related activities. ZDM. doi:10.1007/s11858-020-01170-w

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249–266. doi:10.1007/bf01273731.

Nelsen, R. B., & Alsina, C. (2020). Demostraciones con encanto: un viaje por las matemáticas elegantes. Real Sociedad Matemática Española.

Neuhaus, S., & Rach, S. (2019). Proof comprehension of undergraduate students and the relation to individual characteristics. In Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (No. 31). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Pfeiffer, K. (2011). Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: observations from proof validation and evaluation performances (Doctoral dissertation, National University of Ireland, Galway).

Rach, S., & Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics: Which influence do school-related variables have. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(7), 1343-1363. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9744-8

Rittle-Johnson, B. (2006). Promoting Transfer: Effects of Self-Explanation and Direct Instruction. *Child Development*, 77(1), 1-15. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/3696686

Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M., & Durkin, K. (2017). Promoting self-explanation to improve mathematics learning: A meta-analysis and instructional design principles. *ZDM*, *49*(4), 599–611. doi:10.1007/s11858-017-0834-z

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. En R. C. Kadosh y A. Dowker (Eds.), *Oxford library of psychology. The Oxford handbook of numerical cognition (p. 1118–1134). Oxford University Press*. doi 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*, 27, 587-597. doi: 10.1007/s10648-015-9302-x

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346–362. doi: 10.1037/0022-0663.93.2.346.

Roy, S. (2014). Evaluating novel pedagogy in higher education: A case study of e-Proofs. (Doctoral Thesis). Loughborough University

Rowland, T. (2001). Generic proofs in number theory. In S. Campbell and R. Zazkis (Eds.), Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction. (pp. 157-184). Westport, CT: Ablex Publishing.

Sánchez Turcios, R. A. (2015). t-Student: Usos y abusos. Revista mexicana de cardiología, 26(1), 59-61.

Sánchez Upegui, A. A. (2011). Manual de redacción académica e investigativa: cómo escribir, evaluar y publicar artículos. Fundación Universitaria Católica de Norte. Recuperado de: https://cife.edu.mx/recursos/wp-content/uploads/2019/01/manual-de-redaccion-mayo-05-2011.pdf

Schlagmüller, M., & Schneider, W. (2007). Würzburger Lesestrategie-Wissenstest für die Klassen 7-12. Ein Verfahren zur Erfassung metakognitiver Kompetenzen bei der

Verarbeitung von Texten. [Wurzburg's reading strategies test for classes 7–12. A Procedure to assess metacognitive competences while processing texts]. Göttingen: Hogrefe.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of well-taught mathematics courses. *Educational psychologist*, 23(2), 145-166.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123–151. doi:10.1007/bf01274210

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? Journal for Research in Mathematics Education, 34(1), 4. doi:10.2307/30034698

Selden, A., & Selden, J. (2017). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. In Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline (pp. 339-345).

Siegler, R. S. (1995). How does change occur: A microgenetic study of number conservation. Cognitive Psychology, 28, 225–273.

Siegler, R., & Chen, Z. (2008). Differentiation and integration: guiding principles for analyzing cognitive change. Developmental science, 11 (4), 433-48. doi: 10.1111/j.1467-7687.2008.00689.x

Siegler, R. (2002). Microgenetic studies of self-explanation. In N. Granott y J. Parziale (Eds.), *Microdevelopment: Transition Processes in Development and Learning* (Cambridge Studies in Cognitive and Perceptual Development, pp. 31-58). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511489709.002

Silke Neuhaus & Stefanie Rach. Proof comprehension of undergraduate students and the relation to individual characteristics. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. ⟨hal-02398493⟩

Sparks, J.R. (2012). Language/Discourse Comprehension and Understanding. In: Seel, N.M. (eds) Encyclopedia of the Sciences of Learning. Springer, Boston, MA. Recuperado de: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_1005

Solow, D. (2013). How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought processes (sixth edition). Hoboken, NJ: John Wiley.

Star, J. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. J*ournal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411. doi:10.2307/30034943

Star, J. (2007). Foregrounding Procedural Knowledge. J*ournal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 132-135. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/30034953

Strauss, A., & Corbin, J. M. (1990). Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques. Sage Publications, Inc.

Tavakoli, H. (2012). A dictionary of research methodology and statistics in applied linguistics. Rahnama press.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Vergnaud, G. Harel, y J. Coufrey (Eds.). The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 179–234). SUNY Press.

Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and proving in mathematics education, Vol. 2 Taipei, Taiwan, (pp. 88–93).

Walsham, G., (1995), "Interpretive Case Studies in IS Research: Nature and Method", *European Journal ofInformation Systems*, Vol 4. No 2, pp.74-81.

Weber, K. (2001). Educational Studies in Mathematics, 48(1), 101–119. doi:10.1023/a:1015535614355.

Weber, K. (2008). How Mathematicians Determine If an Argument Is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 431-459. Retrieved January 17, 2021, from http://www.jstor.org/stable/40539306

Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. *Educational Studies in Mathematics, 76(3), 329–344.* doi:10.1007/s10649-010-9292-z

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43(4), 463–482. doi:10.1080/0020739x.2011.622803

Weber, K. (2015). Effective Proof Reading Strategies for Comprehending Mathematical Proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(3), 289–314. doi:10.1007/s40753-015-0011-0

Weber, K., Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). How Mathematicians Obtain Conviction: Implications for Mathematics Instruction and Research on Epistemic Cognition. *Educational Psychologist*, 49(1), 36–58. doi:10.1080/00461520.2013.865527

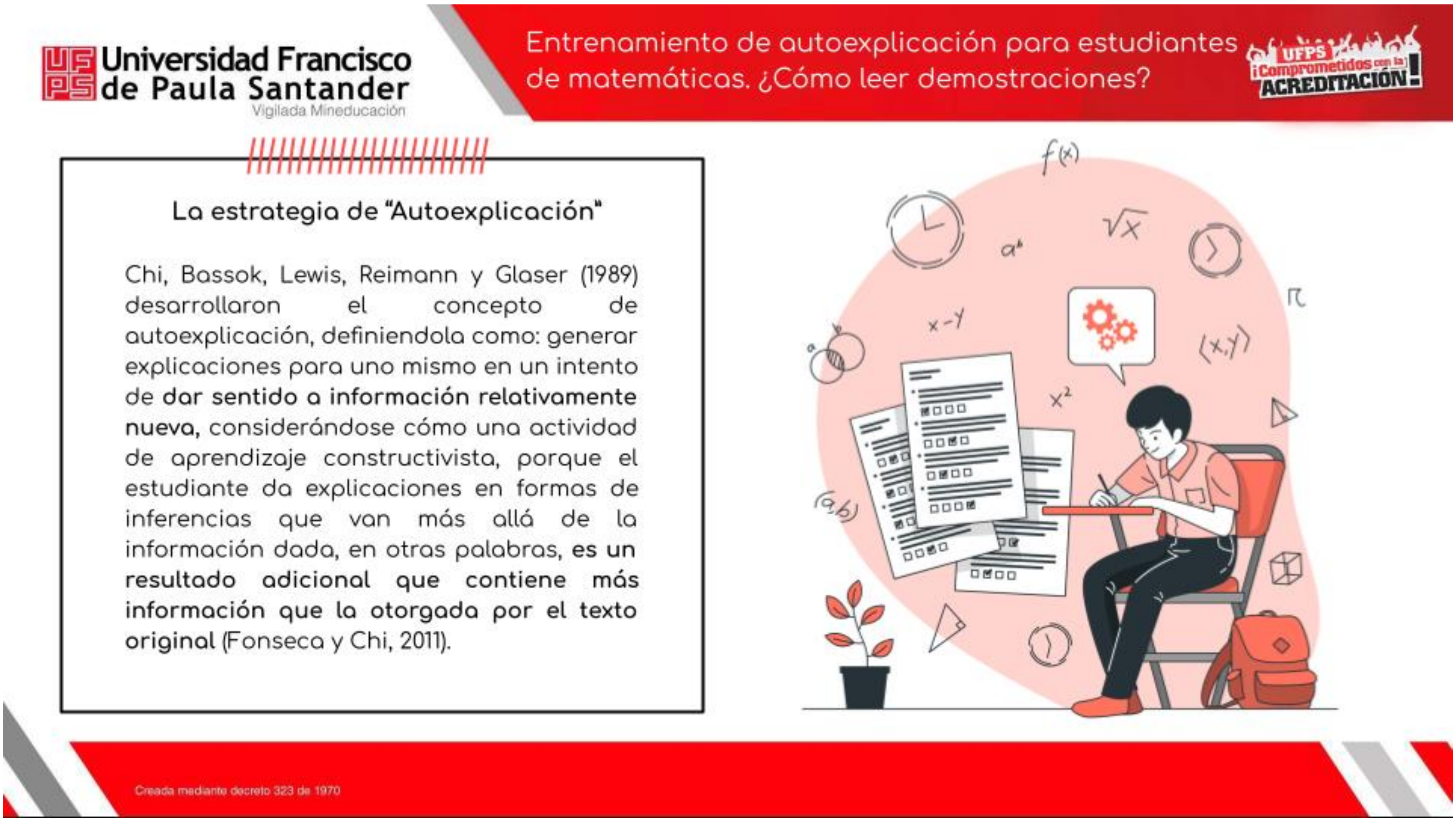
Wong, R. M. F., Lawson, M. J., y Keeves, J. (2002). The effects of self-explanation training on students' problem solving in high-school mathematics. *Learning and Instruction, 12(2),* 233–262. doi: 10.1016/S0959-4752(01)00027-5

Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2007). A model of reading comprehension of geometry proof. Educational Studies in Mathematics, 67(1), 59–76. doi:10.1007/s10649-007-9080-6

Zedeck, S. (2014). APA Dictionary of Statistics and Research Methods (S. Zedeck, Ed.). American Psychological Association.

Anexos

Anexo 1- Folleto de autoexplicación



Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

"¿Cómo autoexplicarse?"

UFPS ¡Comprometidos con la ACREDITACIÓN!

Después de leer cada línea

- Intenta identificar y elaborar las **ideas principales** de la demostración.
- Intenta explicar cada línea en términos de **ideas previas.** Estas ideas pueden ser tomadas de la demostración, ejemplos de teoremas, demostraciones anteriores, o **ideas de su propio conocimiento previo** del área temática.
- Considere cualquier pregunta que surja si la nueva información **contradice** su comprensión actual.

Antes de proceder a la siguiente línea de la demostración debería preguntarse lo siguiente:

- ¿Entiendo las ideas usadas en esa línea?
- ¿Entiendo por qué se han usado esas ideas?
- ¿Cómo se vinculan esas ideas con otras ideas en la prueba, otros teoremas o conocimientos previos que pueda tener?
- ¿La autoexplicación que he generado ayuda a responder a las preguntas que estoy haciendo?

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 62-101.
Tomado y adaptado de: https://www.lboro.ac.uk/media/media/schoolanddepartments/mathematics-education-centre/downloads/research/SE-booklet.pdf

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Teorema : Ningún número entero impar puede ser expresado como la suma de tres números enteros pares.

¡Comprometidos con la ACREDITACIÓN! UFPS

(L1) Supongamos, **por el contrario**, que hay un **número entero impar** x, tal que x = a + b + c, donde a, b y c son números enteros pares.	"Esta demostración utiliza la técnica de prueba por contradicción."
(L2) Entonces a = 2k, b = 2l, y c = 2p, para algunos números enteros k, l, y p.	"Dado que a, b y c son números enteros pares, tenemos que usar la definición de un número entero par, que se usa en la".
(L3) Así x = a + b + c = 2k + 2l + 2p = 2(k + l + p).	"La prueba entonces reemplaza a, b y c con sus respectivas definiciones en la fórmula para la x."
(L4) De ello se deduce que x es par; una contradicción.	"La fórmula para x se simplifica entonces y se muestra que satisface la definición de un incluso entero también; una contradicción."
(L5) Por lo tanto, ningún número entero impar puede ser expresado como la suma de tres números enteros pares.	"Por lo tanto, ningún número entero impar puede ser expresado como la suma de tres números enteros pares."

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 62-101.
Tomado y adaptado de: https://www.lboro.ac.uk/media/media/schoolanddepartments/mathematics-education-centre/downloads/research/SE-booklet.pdf
Creada mediante decreto 323 de 1970

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Ejemplo

UFPS ¡Comprometidos con la ACREDITACIÓN!

Parafraseando

"a, b y c tienen que ser positivos o negativos, incluso números enteros."

No hay ninguna autoexplicación en esta declaración. **No se añade ni se vincula ninguna información adicional.** El lector se limita a utilizar diferentes palabras para describir lo que ya está representado en el texto por las palabras "incluso números enteros".

Monitoreo

"Bien, entiendo que 2(k + l + p) es un número entero par."

Esta **declaración** simplemente muestra el proceso de pensamiento del lector. No es lo mismo que la autoexplicación porque el estudiante **no relaciona la frase con información adicional** en el texto o con conocimientos previos.

Posible autoexplicación

"OK, 2(k + l + p) es un número entero par porque la suma de tres números enteros es un número entero y dos veces un número entero es un número entero par".

En este ejemplo el lector identifica y elabora las ideas principales del texto. **Ellos utilizan la información que ya ha sido presentada para entender la lógica de la demostración.**

Este es el enfoque que se debe tomar después de leer cada línea de una prueba con el fin de mejorar su comprensión del material.

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 62-101.
Tomado y adaptado de: https://www.lboro.ac.uk/media/media/schoolanddepartments/mathematics-education-centre/downloads/research/SE-booklet.pdf
Creada mediante decreto 323 de 1970

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Práctica

¡UFPS Comprometidos con la ACREDITACIÓN!

Definición. Un número abundante es un número **entero positivo** n cuyos divisores suman más de 2n. Por ejemplo, 12 es abundante porque $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 > 24$.

Teorema. El producto de dos primos distintos no es abundante.

Demostración. Sea $n = \rho1\rho2$ donde $\rho1$ y $\rho2$ son primos distintos.

Supongamos que $2 \leq \rho1$ y $3 \leq \rho2$

Los divisores de n son 1, $\rho1$, $\rho2$ y $\rho1\rho2$.

Tengan en cuenta que $\dfrac{\rho1 + 1}{\rho1\text{-}1}$

es una función decreciente de $\rho1$

Así que, $$\left\{\frac{\rho1+1}{\rho1\text{-}1}\right\} = \frac{2+1}{2\text{-}1} = 3$$

Por lo tanto, $$\frac{\rho1+1}{\rho1\text{-}1} \leq \rho2$$

Así que: $\rho1 + 1 \leq \rho1\rho2 - \rho2$.

$$\rho1 + 1 + \rho2 \leq \rho1\rho2.$$

$$1 + \rho1 + \rho2 + \rho1\rho2 \leq 2\rho1\rho2.$$

$$1 + \rho1 + \rho2 + \rho1\rho2 \leq 2n$$

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 62-101.
Tomado y adaptado de: https://www.lboro.ac.uk/media/media/schoolanddepartments/mathematics-education-centre/downloads/research/SE-booklet.pdf

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Práctica

¡Comprometidos con la ACREDITACIÓN! UFPS

Teorema. No hay un número real positivo más pequeño.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe un número real positivo más pequeño.

Por lo tanto, por supuesto, existe un número real *r* tal que por cada número positivo *s*, $0 < r < s$.

Considere $m=r/2$

Claramente, $0 < m < r$.

Esto es una contradicción, ya que m es un número real positivo que es más pequeño que r.
Por lo tanto, no hay un número real positivo más pequeño.

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 62-101. Tomado y adaptado de: https://www.lboro.ac.uk/media/media/schoolanddepartments/mathematics-education-centre/downloads/research/SE-booklet.pdf

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 62-101.
Tomado y adaptado de: https://www.lboro.ac.uk/media/media/schoolanddepartments/mathematics-education-centre/downloads/research/SE-booklet.pdf

Anexo 2 – Constancia de validación por juicio de expertos de los instrumentos utilizados

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN POR JUICIO DE EXPERTOS

Quienes suscriben, **Magister en Educación Matemática Raúl Prada Núñez y Magister en Enseñanza de las Ciencias Básicas Cesar Augusto Hernández-Suarez**, mediante la presente hacemos constar que los instrumentos utilizados para la recolección de datos del proyecto de grado para obtener el título de Licenciatura en matemáticas , titulado "**EXPERIENCIAS DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN CON EL ENTRENAMIENTO DE AUTOEXPLICACIÓN Y SU COMPRENSIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS**", elaborado por los estudiantes David Andree Parada Carrillo y Laura Daniela Pumarejo García. reúnen los criterios de claridad, objetividad, consistencia, coherencia, pertinencia y suficiencia necesarios para ser considerados válidos y confiables, Por tanto, son aptos para ser aplicados en el logro de los objetivos que se plantearon en la investigación.

Atentamente,

Mg. Raúl Prada Núñez	Mg. Cesar Augusto Hernández Suarez
Docente tiempo completo UFPS	Docente tiempo completo UFPS

Anexo 3 – Encuesta de satisfacción

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

Licenciatura en Matemáticas

Encuesta de satisfacción	Muy de acuerdo	De acuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	En desacuerdo	Muy en desacuerdo
Entrenamiento de autoexplicación					
¿Utilizarías las estrategia de autoexplicación para estudios de postgrado?					
¿Recomendarías las estrategias de autoexplicación para el estudio de demostraciones?					
¿Es importante que se enseñen diversas estrategias para mejorar la comprensión de las demostraciones en el programa académico?					
¿El entrenamiento de autoexplicación podría convertirse en un distractor a la hora de comprender demostraciones?					
¿Considera que asimiló por completo el entrenamiento de autoexplicación?					
¿La organización del entrenamiento de autoexplicación es el adecuado?					
¿El folleto es lo suficientemente explícito?					
Modelo de evaluación de la comprensión de las demostraciones					
¿Considera que una prueba de comprensión requiere una mayor dificultad que hacer una demostración?					
¿Crees que el entrenamiento de autoexplicación está relacionado con la forma de evaluarlo en la segunda prueba?					
¿Ha sido evaluada su comprensión durante el transcurso del programa académico?					
¿Implica más tiempo de análisis las pruebas de comprensión?					
Intervención					
¿Considera que una sesión es suficiente para comprender el entrenamiento de autoexplicación?					
¿Los ejemplos de demostraciones utilizados para las intervenciones fueron adecuados?					
¿La presentación del folleto fue adecuada?					
¿Podrías aprender el entrenamiento de autoexplicación de forma autónoma?					
¿Los expositores fueron claros en la información durante las intervenciones?					
¿Los expositores fomentaron espacios para aclarar dudas e inquietudes?					
¿Los expositores despertaron interés en el tema de investigación?					

Anexo 4 – Prueba diagnóstica

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

Licenciatura en Matemáticas

Nombre :_________________________________ **Código**:____________ **Semestre**:____

1. Relaciona cada uno de los tipos de demostración con su respectiva definición.

A. Demostración directa		Se trata de un método para probar que una propiedad de la forma P (n) es cierta para todo entero positivo n. Se comienza mostrando que P (1) se cumple y, acto seguido, que si P (n) es verdad, entonces lo es P (n + 1)
B. Demostración por reducción al absurdo		Se divide la hipótesis en un número finito k de casos, y se hace una demostración del resultado en cada uno de ellos. Las k demostraciones pueden ser directas, por contradicción o de otros tipos.
C. Demostración del contrarrecíproco:		Para probar una implicación del tipo “si A, entonces B”, demostrar la implicación lógica equivalente “si no B, entonces no A”
D. Demostración por inducción matemática:		Usa definiciones, axiomas, identidades, desigualdades, lemas y teoremas probados previamente, etc., para mostrar que la conclusión se deduce lógicamente a partir de las hipótesis.
E. Demostración por casos		Muestra que es lógicamente imposible que el resultado sea falso. Se usa habitualmente asumiendo que lo que se quiere probar es falso y llegando a una contradicción

(Nelsen & Alsina, 2020, p.18)

2. Señalar la hipótesis y la tésis de las siguientes proposiciones, definiciones, teoremas, etc.

Proposición: Si m y b son números reales con $m \neq 0$, entonces la función $f(x) = mx + b$ es uno a uno. (Solow, 2013, p. 116)

Ejercicio. Demostrar que, si ABC es un triángulo rectángulo con lados de longitud entera a y b y hipotenusa de longitud entera c, entonces $\frac{1}{2}\ ax^2 + cx + b$ tiene una raíz racional. (Solow, 2013, p. 175)

Proposición : Cualquier número entero $n \geq 2$ puede expresarse como un producto finito de primos. (Solow, 2013, p. 138)

Es posible que ya hayas visto los teoremas y demostraciones siguientes en clase, o que los hayas leído en tu libro de texto. No hay errores en ellos (la proposición es cierta y la demostración es correcta).

3. Relacione cada demostración con el tipo de demostración utilizada: **Directa, reducción al absurdo, principio de inducción o por casos**.

Ejercicio: Para todo número entero n ≥ 1, la derivada de x^n es nx^{n-1}. (Solow, 2013, p. 142)	Si $n \in Z$, entonces $n^2 + n + 1$ es impar (Argueta Villamar & Linares Altamirano, s.f.)	**Ejercicio:** Si a y b son enteros y b es impar, entonces ±1 no son raíces de $ax^4 + bx^2 + a$. (Solow, 2013, p. 112)
Demostración: La afirmación es verdadera para $n = 1$, porque, $(x)' = 1x^0$ Suponiendo ahora que $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ entonces para x^{n+1}, $\left(x^{n+1}\right)' = [(x)(x^n)]'$ $= (x)'.x^n + x.(x^n)'$ $= x^n + x(nx^{n-1})$ $= (n+1)x^n$. La demostración queda completa. (Solow, 2013, p. 142)	$n\, entero \Rightarrow n\, par\, o\, n\, impar$ $n\, par \Rightarrow n^2\, es\, par \Rightarrow$ $n^2 + n\, es\, par$ $\Rightarrow n^2 + n + 1\, es\, impar$ $n\, impar \Rightarrow n^2\, es\, impar \Rightarrow$ $n^2 + n\, es\, par$ $\Rightarrow n^2 + n + 1\, es\, impar$ (Argueta Villamar & Linares Altamirano, s.f.)	Suponga, por el contrario, que +1 o −1 es una raíz de $ax^4 + bx^2 + a$. Entonces $a(\pm 1)^4 + b(\pm 1)^2 + a = 0$; es decir, $b + 2a = 0$. Por lo tanto, $b = -2a$, lo que no puede suceder, por lo que la demostración está completa. (Solow, 2013, p. 142)
Tipo de Demostración:	**Tipo de Demostración**:	**Tipo de Demostración**:

4. Lee atentamente la siguiente proposición y su demostración.

Proposición. Si *n* es un número entero positivo, entonces *n* es un número primo **"o"** *n* es un cuadrado **"o"** *n* divide a $(n-1)!$

Demostración. Si $n = 1$, luego $n = 1^2$ es un cuadrado y la proposición es verdadera. De modo similar si $n = 2$, entonces n es primo y de nuevo la proposición es verdadera. Ahora suponga que $n > 2$ no es primo ni cuadrado. Si $n > 2$ no es primo, hay enteros *a* y *b* con $1 < a < n$ y $1 < b < n$ tal que $n = a.b$. También, porque *n* no es cuadrado,$a \neq b$. Esto significa que a y b son enteros con $2 \leq a \neq b \leq n - 1$. Es decir, a y b son términos diferentes de $(n-1)(n-2)\cdots 1 = (n-1)!$. Por lo tanto, $ab = n\, que\, divide\, (n-1)!$.

a. ¿Qué relación tiene el conector lógico "**o**" en el tipo de demostración utilizada?
b. En la demostración realizan una suposición de que $n > 2$ no es primo ni cuadrado. ¿Por qué es necesaria esta suposición para la demostración?
c. ¿Qué se puede concluir con la demostración presentada?
d. Demuestra con ejemplos cada una de las condiciones presentadas en la proposición.
e. ¿Cómo puede explicar la expresión $2 \leq a \neq b \leq n - 1$ a partir de las líneas anteriores?

Referencias

Argueta Villamar, H. d. J., & Linares Altamirano, M. J. (s.f.). *Método por Casos*. Lógica. Método por casos. Recuperado el 8 de Marzo de 2022, de http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Logica/l_logica10_d.html

Nelsen, R. B., & Alsina, C. (2020). *Demostraciones con encanto: un viaje por las matemáticas elegantes*. Real Sociedad Matemática Española.

Solow, D. (2013). *How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes* (sixt ed.). Wiley.

Anexo 5 – Prueba de comprensión

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

Licenciatura en Matemáticas

Nombre :_________________________________ **Código**:____________ **Semestre**:____

Lee atentamente el siguiente teorema y su demostración.

Es posible que ya hayas visto el teorema y la demostración siguientes en clase, o que los hayas leído en tu libro de texto. No hay errores en ellos (el teorema es cierto y la demostración es correcta). Tu tarea es leerlos con mucha atención, ya que se te pedirá que respondas a 12 preguntas que evalúan tu grado de comprensión

Definición: Para cada número natural definimos el n-ésimo número de Fibonacci (denotado por f_n) como sigue:

$$f_1 = 1,$$
$$f_2 = 1, \text{ y}$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para todo } n > 2 \text{ y } n \in N$$

Teorema: Todo tercer número de Fibonacci es par. Es decir, f_{3n} es par para todo n $\in$ N.

Demostración:

Como $f_3 = 1 + 1 = 2$, se da el caso de que el tercer número de Fibonacci es par.

Sea k un número natural, y supongamos que f_{3k} es par.

Como $f_{3(k+1)} = f_{3k+2} + f_{3k+1}$ y $f_{3k+2} = f_{3k+1} + f_{3k}$, entonces $f_{3(k+1)} = 2 * f_{3k+1} + f_{3k}$.

Finalmente, como $2 * f_{3k+1}$ es par y f_{3k} es par, entonces $f_{3(k+1)}$ es par.

Así, por el principio de inducción matemática, concluimos que para todo número natural n, f_{3n} es par.

Responda a todas las preguntas de este cuestionario. Todas las preguntas son de opción múltiple en las que se le pide que seleccione **la mejor opción** de una lista de posibles respuestas. Lea atentamente cada pregunta antes de responder.

Prueba de comprensión tomada y adaptada de:
Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., y Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3–18. doi:10.1007/s10649-011-9349-7.

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

Licenciatura en Matemáticas

Lea atentamente las siguientes instrucciones.

Las preguntas de este cuestionario le pide que seleccione **la mejor opción** de una lista de respuestas posibles.

1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa un número par y un número impar **respectivamente** ?
   a. 2n y 2n + 2
   b. 2n - 1 y 2n + 1
   c. 2n + 1 y 2n
   d. 2n y 2n + 1
2. ¿Qué es f_6? Seleccione la mejor opción.
   a. 8
   b. 12
   c. 20
   d. 28
3. ¿Implica el propio teorema que f_8 es un número par, que f_8 es un número impar, o que ninguno de los dos? Seleccione la mejor opción.
   a. El propio teorema implica que $f_8$es un número par.
   b. El propio teorema implica que f_8 es un número impar.
   c. El propio teorema implica que $f_8$es un múltiplo de 3, lo que significa que f_8 podría ser par o impar.
   d. El propio teorema no implica nada sobre f_8.
4. ¿Por qué la prueba comenzó mostrando que f_3 era par? Selecciona la mejor opción.
   a. Porque $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$ son casos evidentes.
   b. Porque 3 es claramente un múltiplo de 3.
   c. Porque $f_3 = 2$ es el primer término par de la secuencia.
   d. Porque f_3 Es el primer caso, cuando k = 1.
5. ¿Por qué $f_{3(k+1)} = 2 * f_{3k+1} + f_{3k}$? Seleccione la mejor opción.
   a. Porque f_{3k+1} y f_{3k} son los dos números de Fibonacci inmediatamente anteriores a $f_{3(k+1)}$
   b. Porque $f_{3(k+1)} = f_{3k+2} + f_{3k+1} = (f_{3k+1} + f_{3k}) + f_{3k+1}$
   c. Porque $f_{3(k+1)} = f_{3k+2} + f_{3k}$ y $f_{3k+2} = 2 * f_{3k+1}$.
   d. Porque 3(k +1) = 3k +3 = 2(3k +1)-3k +1.

Prueba de comprensión tomada y adaptada de:

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., y Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3–18. doi:10.1007/s10649-011-9349-7.

6. En la demostración, se supone que f_{3k} es par. ¿Cómo se utiliza esta suposición en la demostración? Selecciona la mejor opción.
   a. Para deducir que f_3 es par.
   b. Para deducir que $f_{3(k+1)}$ es par.
   c. Deducir que f_{3k+2} es par.
   d. Deducir que f_{3k+1} es par.
7. ¿Funcionarían las ideas de la prueba para demostrar que f_{3k} es siempre un número impar, si redefinimos los dos primeros términos para que sean $f_1 = 1$ y $f_2 = 2$? ¿Por qué sí o por qué no? Selecciona la mejor opción.
   a. Sí, es la misma prueba, ya que la nueva sucesión se obtiene esencialmente a partir del segundo término de la secuencia anterior.
   b. Sí, porque f_3 sería impar y si f_{3k} es impar entonces $f_{3(k+1)}$ sería la suma de un par y un impar, que es un número impar.
   c. No, puesto que no se trata de la sucesión de Fibonacci, no se pueden utilizar simplemente las ideas de la prueba en una nueva secuencia.
   d. No, porque como se demostró en la prueba, $2 * f_{3k+1} + f_{3k}$ es un número par, lo que sigue siendo cierto en este caso.
8. Consideremos los números de Lucas que se definen como sigue:

$$L_1 = 2$$
$$L_2 = 1$$
$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ para todo n} > 2 \text{ y n} \in \mathbb{N}$$

Cómo utilizarías las ideas de la prueba para demostrar que L_{3k+1} es par para todo k $\in$ N. Selecciona la mejor opción.
   a. Para k = 1, $L_{3k+1} = L_4 = L_3 + L_2 = 3 + 1 = 4$, que es par. Ahora, supongamos que L_{3k+1} es par para algún k $\in$ **N**. Como $L_{3k+1} = L_{3k} + L_{3k-1}$ y $L_{3k} = L_{3k-1} + L_{3k-2}$, entonces $L_{3k+1} = 2 * L_{3k-1} + L_{3k-2}$, que es par. Por tanto, L_{3k+1} es par.
   b. Observa que $L_3 = L_2 + L_1 = 1 + 2 = 3$ y $L_4 = L_3 + L_2 = 3 + 1 = 4$. Por tanto, cuando k = 1, $L_{3k+1} = L_4$ es par. Ahora, por inducción, supongamos que L_{3k} es par para algún k $\in$ **N**. Entonces $L_{3(k+1)} = L_{3k+2} + L_{3k+1} = 2 * L_{3k+1} + L_{3k}$, que es claramente par.

Prueba de comprensión tomada y adaptada de:
Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., y Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3–18. doi:10.1007/s10649-011-9349-7.

c. Proceder por el principio de inducción matemática: $L_1 = 2$ es par, $L_2 = 1$ es impar, $L_3 = 1+2 = 3$ es impar. Supongamos que L_{3k} es impar. Entonces $L_{3k+1} = L_{3k} + L_{3k-1}$. Como la suma de dos números impares es un número par, concluimos que L_{3k+1} es par para todo k ∈ **N**.

d. Cuando k = 1, $L_{3k+1} = L_4 = L_3 + L_2 = 3+1 = 4$, que es par. Ahora, supongamos que L_{3k+1}es par para algún k ∈ **N**. Entonces $L_{3k+4} = L_{3k+3} + L_{3k+2} = L_{3k+2} + L_{3k+1}) + L_{3k+2} = 2 * L_{3k+2} + L_{3k+1}$. Como tanto $2 * L_{3k+2}$ como L_{3k+1} son pares, entonces $L_{3(k+1)+1}$ es par.

9. Suponiendo que f_{12} es par, ¿Cómo utilizarías las ideas de la prueba para demostrar que f_{15} es par? Selecciona la mejor opción.

a. Suponga que f_{12} es par. Como $f_{15} = f_{14} + f_{13}$ y $f_{14} = f_{13} + f_{12}$ entonces $f_{15} = 2 * f_{13} + f_{12}$. Como f_{12}se supone que es par y $2 * f_{13}$ es par, concluimos que f_{15} es la suma de dos números pares, lo que implica que f_{15} es par.

b. Es evidente que $f_3 = 1+1$ es par. Por inducción, suponemos que f_{3k} es par para todo k ∈ N y probamos que $f_{3(k+1)}$ es par. En este caso, 3(k +1) = 15 y 3k = 12. Por tanto, como 15 es un múltiplo de 3 y estamos suponiendo que f_{3k} es par para todo k ∈ **N**, entonces f_{15}es par.

c. Como $f_{15} = f_{14} + f_{13}$, tenemos que calcular los valores de f_{14} y f_{13}. Del mismo modo, para calcular f_{13} necesitaríamos los valores de f_{12} y f_{11}. Observa que $f_{11} = 89$ y $f_{12} = 144$. Por lo tanto, $f_{13} = 233$, $f_{14} = 377$, y $f_{15} = 610$, que es par.

d. Ninguno de los anteriores utiliza las ideas de la prueba para demostrar que f_{15} es par, bajo el supuesto que f_{12} es par.

Anexo 6 – Cartas de consentimiento para las entrevistas

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

Licenciatura en Matemáticas

Consentimiento Informado

Yo Jhoan Sebastian Sepulveda Solano identificado (a) con documento de identidad N° 1004845307 de Cúcuta, en pleno uso de mis facultades legales, mentales, cognoscitivas y volitivas, de manera consciente y sin ninguna clase de presión, faculto y autorizo a David Andree Parada Carrillo identificado con número de documento N°1.092'355.495 de Villa del Rosario y a Laura Daniela Pumarjo García identificado con número de documento N°1.090'503.640 de Cúcuta, quien como estudiantes de Licenciatura en Matemáticas han puesto en conocimiento mi participación a través del ejercicio de una entrevista semiestructurada. Así mismo me han informado que puedo retirarme del proceso en cualquier momento. Este cuestionario hace parte de un proyecto de investigación del Programa Licenciatura en Matemáticas, para lo cual se solicita por favor brindar en forma voluntaria y con la certeza que su información suministrada es sólo para fines académicos y sus datos estarán protegidos, según la Ley 1581 de 2012- Decreto 1377 de 2013.

En concordancia con lo anterior, aceptó que el ejercicio lo va a desarrollar profesionales en formación quienes a su vez estarán supervisados por los docentes Cesar Augusto Hernández Suarez y Raúl Prada Núñez que cuenta con la experticia, idoneidad y cualificación requerida para el ejercicio de dicha función de acompañamiento. Se me informa y acepto, que no se verá afectada mi intimidad y derecho al anonimato.

Para constancia se firma de conformidad.

Nombres y apellidos del participante Jhoan Sebastian Sepulveda Solano

Firma Jhoan S. Sepúlveda

Identificación 1004845307

Fecha (Año Mes Día) 2022-06-13

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

Licenciatura en Matemáticas

Consentimiento Informado

Yo Kevin Alonso Villamizar Sandoval identificado (a) con documento de identidad N° 1090493373 de Cúcuta, en pleno uso de mis facultades legales, mentales, cognoscitivas y volitivas, de manera consciente y sin ninguna clase de presión, faculto y autorizo a David Andree Parada Carrillo identificado con número de documento N°1.092'355.495 de Villa del Rosario y a Laura Daniela Pumarjo García identificado con número de documento N°1.090'503.640 de Cúcuta, quien como estudiantes de Licenciatura en Matemáticas han puesto en conocimiento mi participación a través del ejercicio de una entrevista semiestructurada. Así mismo me han informado que puedo retirarme del proceso en cualquier momento. Este cuestionario hace parte de un proyecto de investigación del Programa Licenciatura en Matemáticas, para lo cual se solicita por favor brindar en forma voluntaria y con la certeza que su información suministrada es sólo para fines académicos y sus datos estarán protegidos, según la Ley 1581 de 2012- Decreto 1377 de 2013.

En concordancia con lo anterior, aceptó que el ejercicio lo va a desarrollar profesionales en formación quienes a su vez estarán supervisados por los docentes Cesar Augusto Hernández Suarez y Raúl Prada Núñez que cuenta con la experticia, idoneidad y cualificación requerida para el ejercicio de dicha función de acompañamiento. Se me informa y acepto, que no se verá afectada mi intimidad y derecho al anonimato.

Para constancia se firma de conformidad.

Nombres y apellidos del participante Kevin Alonso Villamizar S.

Firma Kevin Villamizar

Identificación 1090493373.

Fecha (Año Mes Día) 2022 - 06 - 13.

Anexo 7 – Guion entrevista semiestructurada

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación
NIT. 890500622 - 6

Licenciatura en Matemáticas

Objetivo de investigación: Describir los cambios de la comprensión de las demostraciones matemáticas antes y después del entrenamiento de autoexplicación

Antes del entrenamiento de autoexplicación

- ¿Cómo estudias para la evaluación en las asignaturas que implican demostraciones?
- ¿Alguna vez ha sido evaluada su comprensión al leer demostraciones?
- ¿Conocías otras estratégias para mejorar la comprensión?
  - En caso de responder afirmativamente ¿Has aplicado alguna?
- ¿Qué estratégias aplicaste durante la lectura de la demostración en la prueba diagnóstica?

Durante el entrenamiento de autoexplicación
(Socialización del entrenamiento de autoexplicación)

- ¿Conocías las estrategias propuestas en el entrenamiento?
  - En caso de responder afirmativamente, preguntar ¿En qué situaciones las habías puesto en práctica?
- ¿Cuántas sesiones consideras suficientes para comprender el entrenamiento de autoexplicación?
- ¿Qué recomendaciones harías para mejorar la enseñanza del entrenamiento?

Después del entrenamiento de autoexplicación

- Durante la segunda prueba ¿Aplicó alguna estrategia del entrenamiento de autoexplicación?
  - En caso de responder afirmativamente¿Siente que tuvo un aporte al momento de comprender la demostración?
- ¿Qué relación encuentra entre la prueba diagnóstica y la segunda prueba?
- Durante su proceso de formación académica en el programa de Lic. en Matemáticas, ¿Había sido evaluada su comprensión cómo se realizó en la segunda prueba?
- ¿Qué tan importante considera que sea evaluada la comprensión de las demostraciones durante el curso del programa académico?
- ¿Qué prefieres, que en una evaluación sea medida su comprensión o su habilidad para realizar demostraciones?
- ¿Cómo prefieres las preguntas de comprensión, abiertas o con selección múltiple?

Anexo 8 – Análisis de la entrevista, entrevistado 1

Preguntas/Instruccion Principal	**¿Qué buscamos?**	**Su Respuesta**	**Unidad de Análisis**	**Unidad de significado condensado. Interpretación del significado subyacente**		**Código**	**Categoria**
¿Cómo estudias para la evaluación en las asignaturas que implican demostraciones?	¿Como estudiaba demostraciones? ¿Que estrategias usaba?	Pues, las primeras que eran demostración, eran como más fáciles entre comillas, Las entendía, era haciendo ejercicios y de tanto hacer entonces como que generalizaba procesos y comprendía lo que hacía, ya para las materias difíciles como topología y eso me aprendía las cosas de memoria porque realmente no entendía las demostraciones, es decir, al inicio todo era como práctico, algo así, haciendo y haciendo y haciendo, pero ya a lo último si era memoria porque se me dificultaba.	Pues, las primeras que eran demostración, eran como más fáciles entre comillas, Las entendía, era haciendo ejercicios y de tanto hacer entonces como que generalizaba procesos y comprendía lo que hacía	Comprendia haciendo ejercicios repetidamente hasta hacer generalizaciones	E1A1	Aprendizaje inductivo	Antes del entrenamiento de autoexplicación
			ya para las materias difíciles como topología y eso me aprendía las cosas de memoria porque realmente no entendía las demostraciones... pero ya a lo último si era memoria porque se me dificultaba.	Aprendia mediante la memorización, pero no comprendia	E1A2	Aprendizaje memoristico - Dificultad en la comprensión de las demostraciones	
¿Conocías otras estratégias para mejorar la comprensión?	¿Como estudiaba demostraciones? ¿Que estrategias usaba?	No, la verdad no sabía que existían estrategias para demostración, pensé que eso era como ¡Uy no! eso se saben los procesos pero no sabía que existían estrategias para una mejor demostración.	No, la verdad no sabía que existían estrategias para demostración	No conoce estrategias para cualquier actividad demostrativa	E1A3	Desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones	
			pensé que eso era como ¡Uy no! eso se saben los procesos	La unica forma de comprender es mediante la memoria	E1A4	Aprendizaje memoristico	
¿Qué estratégias aplicaste durante la lectura de la demostración en la prueba diagnóstica?	¿Como estudiaba demostraciones? ¿Cuales estrategias usaba?	Básicamente, uno pues como decir, como tomarme el tiempo y analizar las cosas que iba haciendo, osea que hice esto, como lo puedo analizar,o como lo entiendo y al momento que siento que era un poco como más lento me daba como esa seguridad de que las cosas como que iban bien, por decirlo así... Pero era como un poquito, osea permitía que las cosas se comprendieran mejor.	como tomarme el tiempo y analizar las cosas que iba haciendo, osea que hice esto, como lo puedo analizar,o como lo entiendo y al momento que siento que era un poco como más lento me daba como esa seguridad de que las cosas como que iban bien, por decirlo así...	Tomando su tiempo para leer y releer hasta encontrar significado	E1A5	Lectura intensiva	
¿Conocías las estrategias propuestas en el entrenamiento?	Sus impresiones durante la intervención del entrenamiento y recomendaciones	Como decía anteriormente, no tenía conocimiento de que existían estrategias para las demostraciones, pues al ser esta una estrategia no tenía conocimiento absolutamente de nada.	no tenía conocimiento de que existían estrategias para las demostraciones, pues al ser esta una estrategia no tenía conocimiento absolutamente de nada	Reafirma el desconocimiento de estrategias para actividades demostrativas	E1E1	Desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones	Durante el entrenamiento de autoexplicación
¿Cuántas sesiones consideras suficientes para comprender el entrenamiento de autoexplicación?	Sus impresiones durante la intervención del entrenamiento y recomendaciones	Pues, desde mi punto de vista es una estrategia fácil de comprender, como que no tiene cosas muy estructuradas y creo que a mi parecer es fácil de comprender y creo que con una o dos sesiones sería suficiente.	desde mi punto de vista es una estrategia fácil de comprender, como que no tiene cosas muy estructuradas y creo que a mi parecer es fácil de comprender y creo que con una o dos sesiones sería suficiente.	Las estrategias son de fácil comprensión, realiza una recomendación para su enseñanza	E1E2	Recomendación de intervención	
¿Qué recomendaciones harías para mejorar la enseñanza del entrenamiento?	Sus impresiones durante la intervención del entrenamiento y recomendaciones	En general, creería que está bien, me gustó, aunque sí estaría bien añadir más ejercicios para comprender mejor las estrategias y decir como okey puedo comprender y asimilar los procesos.	bien añadir más ejercicios para comprender mejor las estrategias y decir como okey puedo comprender y asimilar los procesos	Realiza mas recomendaciones para su enseñanza	E1E3	Recomendación de intervención	
Sin embargo, con los ejercicios presentados se gastó el tiempo de toda la sesión, de toda la clase, entonces ¿Sería recomendable más sesiones?	Sus impresiones durante la intervención del entrenamiento y recomendaciones	No más sesiones, pero sí dos más ejercicios, no tanto pero sí con dos más podría servir, así como los que se hicieron que eran un poquito largos pero eran buenos, osea como uno o dos más así.	No más sesiones, pero sí dos más ejercicios	Reafirma sus recomendaciones para su enseñanza	E1E4	Recomendación de intervención	
Durante la segunda prueba ¿Aplicó alguna estrategia del entrenamiento de autoexplicación?	Aplicabilidad del entrenamiento	Pues ya al tener eso en mente como que ya iba más despacio, necesito leer la pregunta que me quieren decir y ya realmente como que se tomaba uno ese tiempo de comprender, no simplemente leer por encima sino saber lo que están haciendo y así llegar a una respuesta adecuada y trataba de comprender lo que estaban diciendo para seguir con el proceso.	ya al tener eso en mente como que ya iba más despacio, necesito leer la pregunta que me quieren decir y ya realmente como que se tomaba uno ese tiempo de comprender	Combina su estrategia de lectura intensiva con la aplicación de las estrategias del entrenamiento	E1D1	Aplicación de la estrategia de autoexplicación	
¿Siente que tuvo un aporte al momento de comprender la demostración?	Aplicabilidad del entrenamiento	De cierta manera sí, sí siempre ayudó, sí porque ¿esa fue la idea no? de con lo que nos enseñaron tratar de aplicarlo y además las preguntas daban para eso, entonces si.	con lo que nos enseñaron tratar de aplicarlo y además las preguntas daban para eso	Afirma que la evaluación incita a aplicar las estrategias	E1D2	Aplicación de la estrategia de autoexplicación	

¿Qué relación encuentra entre la prueba diagnóstica y la segunda prueba?	Modelo de evaluación	No, porque en la primera prueba pues daban como, si mal no me equivoco daban un proceso completo y las preguntas giraban en torno a la comprensión de la demostración, y no como que demuestre y cosas así, y eso es lo que buscaba también la segunda prueba, como que preguntas que llevarán como ese análisis, esa comprensión de lo que se hacía, entonces si había.	No, porque en la primera prueba pues daban como, si mal no me equivoco daban un proceso completo y las preguntas giraban en torno a la comprensión de la demostración, y no como que demuestre y cosas así, y eso es lo que buscaba también la segunda prueba, como que preguntas que llevarán como ese análisis, esa comprensión de lo que se hacía, entonces si había.	En la primera prueba las preguntas giraban en torno a la comprensión de la demostracion, de forma similar se realizó en la segunda prueba	E1D3	Evaluación de la comprensión	Despues del entrenamiento de autoexplicación
Durante su proceso de formación académica en el programa de Lic. en Matemáticas, ¿Había sido evaluada su comprensión cómo se realizó en la segunda prueba?	Modelo de evaluacion	La verdad no, siempre fue como que le daban este enunciado, este teorema, demuestrelo como usted pueda, pero nunca los profesores… los profesores se enfocan en explicar la demostración, pero no en como hacerla o como comprenderla que es diferente a explicarla que nos lleven en ese proceso, lo mismo en uno como maestro que explico el proceso pero no, uno debe enseñarle a los estudiantes que comprendan el proceso y puedan hacer los otros ejercicios, no solo como que okey me explicaron ese y entonces hago ejercicios parecidos. Sí ya comprendo las cosas puedo generalizar o relacionar procesos.	La verdad no, siempre fue como que le daban este enunciado, este teorema, demuestrelo como usted pueda,	La enseñanza se centró en dar un enunciado o teorema y demostrar como pueda	E1D4	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
			los profesores se enfocan en explicar la demostración, pero no en como hacerla o como comprenderla que es diferente a explicarla que nos lleven en ese proceso, lo mismo en uno como maestro que explico el proceso pero no	La enseñanza se basa en una unica instrucción de forma vertical	E1D5	Critica a la enseñanza tradicional	
			uno debe enseñarle a los estudiantes que comprendan el proceso y puedan hacer los otros ejercicios, no solo como que okey me explicaron ese y entonces hago ejercicios parecidos. Sí ya comprendo las cosas puedo generalizar o relacionar procesos	Se debe enseñar a comprender el proceso para que puedan ser autónomos y aprendan a extraer deducciones	E1D6	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
¿Qué tan importante considera que sea evaluada la comprensión de las demostraciones durante el curso del programa académico?	Potencial de aplicación en el programa	Pues debe haber una relación entre las partes procedimentales, como lo… y pero también que se evalúe la parte comprensiva, es decir que haya un equilibrio entre las dos situaciones porque a veces de que me sirve como saber o… en casos uno se poncha en no saber comprender la demostración pero creería que es un equilibrio entre las dos partes, tanto la comprensión como lo procedimental.	Pues debe haber una relación entre las partes procedimentales, como lo… y pero también que se evalúe la parte comprensiva	Recomienda que se enseñen ambas actividades demostrativas	E1D7	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
			haya un equilibrio entre las dos situaciones porque a veces de que me sirve como saber o… en casos uno se poncha en no saber comprender la demostración pero creería que es un equilibrio entre las dos partes, tanto la comprensión como lo procedimental.	Reafirma su recomendación sobre la enseñanza de ambas actividades demostrativas	E1D8	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
¿Qué prefieres, que en una evaluación sea medida su comprensión o su habilidad para realizar demostraciones?	Modelo de evaluación	Pues más fácil o más llamativo pues la comprensión, porque realmente pues son cuestiones que lo ponen a pensar a uno y que realmente como que le van a ayudar a posterior, porque son conocimientos que se quedan ahí, porque muchas veces como que le preguntan lo procedimental, uno se aprende lo procedimental y ya luego cuando uno va a hacer algo queda ponchado, entonces ya con esa comprensión como que va a permitir mejor las cosas, aunque creería que hacer un equilibrio pero que evalúen más la comprensión y no solo lo demostrativo.	Pues más fácil o más llamativo pues la comprensión, porque realmente pues son cuestiones que lo ponen a pensar a uno y que realmente como que le van a ayudar a posterior,	Encuentra mas facil trabajar en la comprensión y además le encuentra mayor utilidad a futuro	E1D9	Recomendacion en el cambio de evaluacion	
			porque son conocimientos que se quedan ahí, porque muchas veces como que le preguntan lo procedimental, uno se aprende lo procedimental y ya luego cuando uno va a hacer algo queda ponchado	El aprendizaje mecanicista no genera autonomia	E1D10	Critica a la enseñanza tradicional	
			aunque creería que hacer un equilibrio pero que evalúen más la comprensión y no solo lo demostrativo	Reafirma la prioridad en la enseñanza de la comprensión sobre la construcción	E1D11	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
¿Cómo prefieres las preguntas de comprensión, abiertas o con selección múltiple?	Modelo de evaluación	Estoy de acuerdo con ambas formas, tanto abiertas como preguntas de selección múltiple, las dos pueden servir, las dos me parecen bien.	Estoy de acuerdo con ambas formas, tanto abiertas como preguntas de selección múltiple, las dos pueden servir, las dos me parecen bien.	Cualquier tipo de pregunta es util para evaluar la comprensión	E1D12	Recomendacion en el cambio de evaluacion	

Anexo 9 – Análisis de la entrevista, entrevistado 2

Preguntas/Instruccion Principal	¿Qué buscamos?	Su Respuesta	Unidad de Análisis	Unidad de significado condensado. Interpretación del significado subyacente		Código	Categoría
¿Cómo estudias para la evaluación en las asignaturas que implican demostraciones?	¿Como estudiaba demostraciones? ¿Que estrategias usaba?	Bueno, pues en primera parte para el estudio, ya que pues las demostraciones siempre se me han complicado, a veces trato de hacerlas un poquito memorísticas, aprender el paso a paso que se debe seguir, la estructura que se tiene, aprender lo que son las leyes y todo lo que implican las demostraciones, porque pues son tantas áreas en si que tienen que llevar como esa profundidad de que uno debe analizar el contexto, a veces pues trata uno de no hacerlo memorístico pero se convierte en memorístico al no tener como la comprensión de esos temas en sí de demostración, por la dificultad que uno puede tener al momento de aprenderlas.	ya que pues las demostraciones siempre se me han complicado,	Siempre ha tenido dificultades con las demostraciones	E2A1	Dificultad en la comprensión de las demostraciones	Antes del entrenamiento de autoexplicación
			a veces trato de hacerlas un poquito memorísticas, aprender el paso a paso que se debe seguir, la estructura que se tiene, aprender lo que son las leyes y todo lo que implican las demostraciones,	Utiliza aprenderse de memoria las demostraciones con todos sus elementos	E2A2	Aprendizaje memoristico	
			a veces pues trata uno de no hacerlo memorístico pero se convierte en memorístico	Intenta no aprender de memoria, pero es su unica forma de aprenderlo	E2A3	Aprendizaje memoristico	
			al no tener como la comprensión de esos temas en sí de demostración, por la dificultad que uno puede tener al momento de aprenderlas.	Justifica el aprendizaje memoristico por su dificultad en la comprensión de las demostraciones	E2A4	Dificultad en la comprensión de las demostraciones	
¿Conocías otras estratégias para mejorar la comprensión?	¿Como estudiaba demostraciones? ¿Que estrategias usaba?	No, hasta el momento no conocía en si ninguna estrategia pues la verdad eehh, como le dije pues la anterior pregunta y en cuanto al contexto de conocer estrategias pues no porque en realidad porque las estrategias que uno conoce son más que todo digamos de didácticas pero no, aparte de las estrategias de conocimiento de demostración o comprensión del punto de demostración de materias digamos como la teoría de números o álgebra abstracta, no está como ese proceso de metodología o estrategia que pueda ayudarlo a uno a mejorar el proceso de aprendizaje.	pero no, aparte de las estrategias de conocimiento de demostración o comprensión del punto de demostración de materias digamos como la teoría de números o álgebra abstracta, no está como ese proceso de metodología o estrategia que pueda ayudarlo a uno a mejorar el proceso de aprendizaje.	No conoce estrategias para la comprensión de la teoria de números, algebra abstracta y similares.	E2A5	Desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones	
			porque en realidad porque las estrategias que uno conoce son más que todo digamos de didácticas	Conoce estrategias en el area de la didactica de las matemáticas	E2A6	Estrategias para la enseñanza de las matemáticas	
¿Qué estratégias aplicaste durante la lectura de la demostración en la prueba diagnóstica?	¿Como estudiaba demostraciones? ¿Que estrategias usaba?	En cuanto a la estrategia de la prueba diagnóstica, más que todo pues, fue como recordar algunas cosas que uno tiene en esa memoria a largo plazo, porque pues, lo que trate de hacer fue mirar más que todo que era lo que comprendía o lo que no comprendía desde el punto de lo que estaba leyendo, haciendo el análisis porque pues tanto tiempo que uno pues pasa el tiempo y ve esas materias que veíamos anteriormente, hay cosas que se quedan pero hay otras que no se quedan, entonces al momento de realizar una prueba diagnóstica sobre si uno recuerda o no recuerda algo o se acuerda de lo que aprendió, comprendió durante el proceso de aprendizaje, entonces uno queda como que ¡Uy!, ahora que digo, entonces más que todo eso el recordar lo que uno conoce y pues preguntar a alguien, mire se acuerda de esto, así, la relacion que pueda tener digamos también con los compañeros, acerca de lo que ellos entienden o comprenden de lo trabajado en la prueba diagnóstica.	fue como recordar algunas cosas que uno tiene en esa memoria a largo plazo	Recurre al aprendizaje memoristico	E2A7	Aprendizaje memoristico	
			lo que trate de hacer fue mirar más que todo que era lo que comprendía o lo que no comprendía desde el punto de lo que estaba leyendo,	Descarta la información entre la que comprende y la que no puede comprender	E2A8	Desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones	
			al momento de realizar una prueba diagnóstica sobre si uno recuerda o no recuerda algo o se acuerda de lo que aprendió, comprendió durante el proceso de aprendizaje, entonces uno queda como que ¡Uy!, ahora que digo, entonces más que todo eso el recordar lo que uno conoce	Presenta dificultad para recordar lo aprendido como consecuencia del aprendizaje memoristico	E2A9	Aprendizaje memoristico	
¿Conocías las estrategias propuestas en el entrenamiento?	Sus impresiones durante la intervención del entrenamiento y recomendaciones	No, la verdad pues, era la primera vez que escuchaba de la estrategia que ustedes trabajaron de la autoexplicación y la propuesta del entrenamiento, no había escuchado acerca de eso en realidad o en si no la conocía hasta el momento hasta que ustedes la presentaron uno dice como que ¡Ah! ¿Hay una manera más fácil de aprender? entonces no, no la había escuchado.	era la primera vez que escuchaba de la estrategia que ustedes trabajaron de la autoexplicación y la propuesta del entrenamiento,	No habia tenido referencias de las estrategias del entrenamiento de autoexplicación	E2E1	Desconocimiento en estrategias para comprender demostraciones	

¿Cuántas sesiones consideras suficientes para comprender el entrenamiento de autoexplicación?	Sus impresiones durante la intervención del entrenamiento y recomendaciones	Bueno, ustedes pues trabajaron una sola sesión, pues yo consideraría que entre dos o tres sesiones, para que, para llegar a un punto donde uno diga, el proceso es así, se trabaja así, entonces qué otros caminos se puede seguir, como se puede implementar, y que fundamentacion me permite aplicar eso digamos.	pues yo consideraría que entre dos o tres sesiones, para que, para llegar a un punto donde uno diga, el proceso es así, se trabaja así,	Es recomendable realizar dos o tres sesiones para facilitar el aprendizaje	E2E2	Recomendación de intervención	Durante el entrenamiento de autoexplicación
¿Qué recomendaciones harías para mejorar la enseñanza del entrenamiento?	Sus impresiones durante la intervención del entrenamiento y recomendaciones	más allá de un contexto simplemente como una prueba, aplicarlo a una realidad en un contexto de aula de clase, en donde uno vaya a desarrollar la técnica de autoexplicación.	de un contexto simplemente como una prueba, aplicarlo a una realidad en un contexto de aula de clase, en donde uno vaya a desarrollar la técnica de autoexplicación.	Sugiere que el entrenamiento no sea aplicado solo como preparacion para una prueba, sino que sea aplicado en asignaturas donde pueda ser aplicado	E2E3	Recomendación de intervención	
Durante la segunda prueba ¿Aplicó alguna estrategia del entrenamiento de autoexplicación?	Aplicabilidad del entrenamiento	Ehh si, la verdad pues cuando ustedes nos dieron el proceso de autoexplicación que era el método, yo mas que todo lo que hice en sí, fue digamos mirar la autoexplicación que ustedes nos había dado, que era como una pequeña guía, un pequeño folleto, yo lo analicé y mire cómo era que se hacía el paso a paso, ya que una prueba, más que todo la prueba que estaba respondiendo lo que considerábamos en sí correcto, yo mire como era el proceso, luego leí las preguntas y analice, y entonces trate de mirar la metodología que ustedes nos explicaron y como aplicarlo al taller que ustedes nos realizaron.	fue digamos mirar la autoexplicación que ustedes nos había dado, que era como una pequeña guía, un pequeño folleto, yo lo analicé y mire cómo era que se hacía el paso a paso,	Realiza un estudio de las estrategias posterior a la intervención	E2D1	Aplicación de la estrategia de autoexplicación	Despues del entrenamiento de autoexplicación
En caso de responder afirmativamente¿Siente que tuvo un aporte al momento de comprender la demostración?		En cuanto al momento de aplicarlo, pude pues digamos, llegar a un punto de decir ¡eh mire!, comprendo lo que está escrito de una manera más sencilla en donde digamos llega a un punto en donde uno no sabe qué hacer, ni sabe por dónde empezar, ni sabe cómo va a desarrollar lo que está ahí en la hoja y se queda como bloqueado, pero al momento de aplicar ese proceso de autoexplicación, uno empieza a decir bueno puedo escoger este camino, puedo llegar de esta manera a la respuesta, o puedo tratar de resolucionar las preguntas que están ahí de acuerdo a algo que nos están explicando como un paso a paso donde puedo hacer o pueda desarrollar y no simplemente el hecho de resuelva y ya.	comprendo lo que está escrito de una manera más sencilla	Mediante el estudio de las estrategias afirma que se le facilita la lectura de una demostración	E2D2	Aplicación de la estrategia de autoexplicación	
			digamos llega a un punto en donde uno no sabe qué hacer, ni sabe por dónde empezar, ni sabe cómo va a desarrollar lo que está ahí en la hoja y se queda como bloqueado,	Reafirma la dificultad que presentaba para comprender demostraciones	E2D3	Dificultad en la comprensión de las demostraciones	
			al momento de aplicar ese proceso de autoexplicación, uno empieza a decir bueno puedo escoger este camino, puedo llegar de esta manera a la respuesta	Al aplicar las estrategias del entrenamiento, facilitan la comprensión de las demostraciones	E2D4	Aplicación de la estrategia de autoexplicación	
			puedo tratar de resolucionar las preguntas que están ahí de acuerdo a algo que nos están explicando como un paso a paso donde puedo hacer o pueda desarrollar y no simplemente el hecho de resuelva y ya.	Tener la oportunidad de justificar el significado de lineas en una demostración y no solo construir demostraciones	E2D5	Recomendacion de cambio en la evaluacion	
¿Qué relación encuentra entre la prueba diagnóstica y la segunda prueba?	Modelo de evaluación	En cuanto a la prueba diagnóstica es digamos observar más que todo lo que nosotros digamos conocíamos o entendíamos o recordábamos acerca de ese contexto de las demostraciones y pues abordar en la segunda prueba la relación se puede decir que hay es como digamos, cómo aportar esos conocimientos que yo tenía o que están ahí, de una manera más sencilla pero con un digamos, un paso a paso de una estructura ya como que tengo que hacerlo sino cómo hacerlo	En cuanto a la prueba diagnóstica es digamos observar más que todo lo que nosotros digamos conocíamos o entendíamos o recordábamos acerca de ese contexto de las demostraciones	La prueba diagnostica como evaluación de los conceptos aprendidos en el programa	E2D6	Definición de prueba diagnostica	
			abordar en la segunda prueba la relación se puede decir que hay es como digamos, cómo aportar esos conocimientos que yo tenía o	Uso de los concepto aprendidos para la comprensión	E2D7	Definicion de evaluación	
			que están ahí, de una manera más sencilla pero con un digamos, un paso a paso de una estructura ya como que tengo que hacerlo sino cómo hacerlo	Siente que la demostración hecha por lineas es más facil de interpretar que una realizada en prosa	E2D8	Recomendacion de cambio en la evaluacion	
Durante su proceso de formación académica en el programa de Lic. en Matemáticas, ¿Había sido evaluada su comprensión cómo se realizó en la segunda prueba?	Modelo de evaluación	No, la verdad como le decía, a veces los docentes pues solamente se fundamentan en la base de, esta es la demostración, tiene que hacerlo por este método, si lo entendió bien, si no lo entendió pues mire a ver qué hace, cómo lo comprende, cómo lo analiza por su lado, ya le explique cómo se hace, pero no se sientan como a decirle a uno, vea mire usted puede hacer esto, guiarse por aquí, si usted no lo comprende de esta manera, puede comprenderlo de esta manera, pero no, la verdad nunca ha sido evaluada como esa	a veces los docentes pues solamente se fundamentan en la base de, esta es la demostración, tiene que hacerlo por este método, si lo entendió bien, si no lo entendió pues mire a ver qué hace, cómo lo comprende, cómo lo analiza por su lado, ya le explique cómo se hace	Describe el modelo de enseñanza y comenta sus experiencias con este	E2D9	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
			vea mire usted puede hacer esto, guiarse por aquí, si usted no lo comprende de esta manera, puede comprenderlo de esta manera, pero no	Expone acerca de como le gustaría el desarrollo de las clases referente a asignaturas demostrativas	E2D10	Recomendacion de cambio en la enseñanza	

		comprensión que uno puede llegar a tener de una demostración, solo es resolverla y ya.	la verdad nunca ha sido evaluada como esa comprensión que uno puede llegar a tener de una demostración, solo es resolverla y ya.	Nunca habia sido evaluda su comprensión de las demostraciones	E2D11	Recomendacion de cambio en la evaluacion	
¿Qué tan importante considera que sea evaluada la comprensión de las demostraciones durante el curso del programa académico?	Potencial de aplicación en el programa	Pues, en realidad es bastante importante, ¿Por qué?, porque si nos ponemos a pensar digamos las materias en donde se aplican las demostraciones son como digamos el terror de los estudiantes, ¿Por qué? porque a muchos se les dificulta demostrar, o no tienen como esa habilidad lógica de solucionar los problemas, si llegamos a un punto donde se pueda aplicar o evaluar de manera que se llegue a un punto de comprensión o un análisis concreto de algo que está siendo demostrado, no simplemente el hecho de aplicarlo, bueno como se hacía antes que me llenaban de un conocimiento y lo "vaceo" todo en lo que tengo que demostrar, sino de cómo comprender el proceso que me lleva a dar solución a una demostración de tal forma que yo no simplemente la solucione por inercia, simplemente porque lo tengo que hacer, que me digan no, esto se hace de esta manera, se puede hacer de otra manera, puede encontrar el camino a seguir de una manera más didáctica y no simplemente de una manera autónoma que es simplemente resolver y resolver y ya.	Pues, en realidad es bastante importante, ¿Por qué?, porque si nos ponemos a pensar digamos las materias en donde se aplican las demostraciones son como digamos el terror de los estudiantes, ¿Por qué? porque a muchos se les dificulta demostrar, o no tienen como esa habilidad lógica de solucionar los problemas	Presenta temor ante la demostraciones por su carencia de habilidades	E2D12	Dificultad en la comprensión de las demostraciones	
			bueno como se hacía antes que me llenaban de un conocimiento y lo "vaceo" todo en lo que tengo que demostrar,	Aprendizaje de las demostraciones solo para ser calificado	E2D13	Critica a la enseñanza tradicional	
			sino de cómo comprender el proceso que me lleva a dar solución a una demostración de tal forma que yo no simplemente la solucione por inercia, simplemente porque lo tengo que hacer, que me digan no, esto se hace de esta manera, se puede hacer de otra manera, puede encontrar el camino a seguir de una manera más didáctica y no simplemente de una manera autónoma que es simplemente resolver y resolver y ya.	Sugiere la enseñanza de herramientas que le permitan avanzar a pesar de encontrar dificultades en las demostraciones	E2D14	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
¿Qué prefieres, que en una evaluación sea medida su comprensión o su habilidad para realizar demostraciones?	Modelo de evaluación	En ese caso debería haber un punto de equilibrio entre ambas cosas, ¿Para qué? para poder analizar el contexto que tiene la persona al momento de comprender las demostraciones, pero también que habilidades tiene o que habilidades no tiene para poderlas mejorar y de este modo digamos en ese punto de equilibrio entre ambos procesos se pueda llevar a cabo un mejor desarrollo de las habilidades en el momento de resolver demostraciones.	En ese caso debería haber un punto de equilibrio entre ambas cosas, punto de equilibrio entre ambos procesos se pueda llevar a cabo un mejor desarrollo de las habilidades en el momento de resolver demostraciones.	Sugiere la enseñanza de ambas actividades demostrativas (comprensión y construccion)	E2D15	Recomendacion de cambio en la enseñanza	
			para poder analizar el contexto que tiene la persona al momento de comprender las demostraciones, pero también que habilidades tiene o que habilidades no tiene para poderlas mejorar	Uso de la comprensión para mejorar habilidades demostrativas	E2D16	Recomendacion de cambio en la evaluacion	